Fourier-Reihen

Handreichung zum 7. Vortrag

Anan Schütt

18. Juni 2018

Definition 1 (Fourier-Reihen). *(Siehe [Wal04, Definition 7.1])*

(i) Sei f eine (reelle oder komplexe) sprungstetige Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Periode von 2π. Dann heißt

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad \text{wobei } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \tag{1}$$

die Fourier-Reihe von f. Unter $S_m f(x)$ versteht man die Partialsumme $\sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx}$.

(ii) Mit $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ ergibt sich eine alternative Form der Fourier-Reihe:

$$Sf(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2}$$

wobei

$$(a_n,\, b_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\cos nt,\, \sin nt)dt \tag{3}$$

Ist f reell, dann sind die Koeffizienten $(a_n)_0^{\infty}, (b_n)_1^{\infty}$ ebenfalls reell.

Satz 2 (Fourier-Koeffizienten (un-)gerader Funktionen). *(Siehe [Wal04, Definition 7.1])* *Ist f gerade ($f(x) = f(-x) = f(2\pi - x)$ für alle x), dann sind alle $b_n = 0$, und*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt dt, \qquad n \geq 0 \tag{4}$$

Ist f ungerade ($f(x) = -f(-x) = -f(2\pi - x)$ für alle x), dann sind alle $a_n = 0$, und

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt dt, \qquad n \geq 1 \tag{5}$$

Lemma 3. *(Siehe [Wal04, Proposition 7.3])*

(i) Sei $e_n(x) = e^{inx}$. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} e_n(x)e_{-m}(x)dx = \int_0^{2\pi} e_n(x)\bar{e}_m(x)dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6}$$

(ii) Konvergiert die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ gleichmäßig gegen f, so sind die Koeffizienten (c_n) wie in Def. 1 gegeben.

Lemma 4. *(Siehe [Wal04, Proposition 7.6])*
Sei f eine sprungstetige Funktion auf $[0, 2\pi]$ mit allen Fourier-Koeffizienten $c_k = 0$. Dann ist $f(x) = 0$ für jeden Punkt der Stetigkeit x (und somit auf allen bis auf abzählbar vielen Punkten).

Satz 5 (Summe der Fourier-Reihen)**.** *(Siehe [Wal04, Theorem 7.7])*
Sei f stetig und 2π-periodisch. Sei auch $Sf(x)$ gleichmäßig konvergent. Dann ist $f(x) = Sf(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi]$.

Satz 6 (Besselsche Ungleichung)**.** *(Siehe [Wal04, Theorem 7.10])*
Sei f beschränkt und uneigentlich integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f - S_m f|^2 + \sum_{-m}^{m} |c_n|^2 \tag{7}$$

Insbesondere ist die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ konvergent und

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 \tag{8}$$

Lemma 7 (Grenzwert der Fourier-Koeffizienten)**.** *(Siehe [Wal04, Corollary 7.11])*
Ist f beschränkt und uneigentlich integrierbar auf $[0, 2\pi]$, dann $\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0$.

Lemma 8 (Dirichlet-Kern)**.** *(Siehe [Wal04, Proposition 7.15])*

(i) Sei $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. Dann ist $\int_0^{2\pi} D_n = 2\pi$, und

$$D_n(x) = \begin{cases} \sin((n+\frac{1}{2})x)/sin(\frac{x}{2}) & \text{für } 0 < x < 2\pi \\ 2n+1 & \text{für } x = 0, 2\pi \end{cases} \tag{9}$$

(ii) Es gilt

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt \tag{10}$$

Satz 9 (Konvergenz der Fourier-Reihen)**.** *(Siehe [Wal04, Theorem 7.16])*
Sei f beschränkt und uneigentlich integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Sei $a \in [0, 2\pi]$ mit f in a Lipschitz-stetig. Dann konvergiert $Sf(a)$ gegen $f(a)$.

Literatur

[Wal04] Walker, Peter Leslie: *Examples and Theorems in Analysis.* Springer, London, 2004, ISBN 978-1-85233-493-2.