Carleman Ungleichung

Handreichung zum 8. Vortrag

Lena Huber

25. Juni 2018

Definition 1. *(Siehe [Gar07, pp. 19])*
Seien $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\gamma_n := \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{1/n} = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n} \quad \textit{heißt geometrisches Mittel,}$$

$$\mu_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \textit{heißt arithmetisches Mittel.}$$

Satz 2 (Carleman Ungleichung). *(Siehe [DM03, pp. 424])*
Sei $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei weiter $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \leq e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

wobei γ_n wie in Def.1 gegeben.

Satz 3 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (AM-GM-Ungleichung)).
Es gilt $\gamma_n \leq \mu_n \forall n \in \mathbb{N}$. Dabei seien γ_n und μ_n wie in Def.1.

Lemma 4.
Es gilt $(n+1)^n \leq e^n \cdot n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lemma 5 (Partielle Summation).
Seien $n, m \in \mathbb{N}, m < n$ und $f_m, \ldots, f_n, g_m, \ldots, g_n \in \mathbb{R}$
Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} f_k \cdot (g_{k+1} - g_k) = [f_n g_{n+1} - f_m g_m] - \sum_{k=m+1}^{n} g_k \cdot (f_k - f_{k-1}).$$

Beweis (der Carleman Ungleichung von Knopp). (Siehe [DM03, pp. 426–427])

Definiere: $c_n := \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \underset{\textit{Lemma 5}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{N} c_n = \sum_{n=1}^{N} a_n - Nc_N < \sum_{n=1}^{N} a_n$

Dann folgt mit Satz 3 und Lemma 4:

$$c_n \geq \left[\frac{n! a_1 a_2 \cdots a_n}{(n+1)^n} \right]^{1/n} = \frac{(n!)^{1/n}}{n+1} \cdot \gamma_n \geq \frac{1}{e} \cdot \gamma_n \quad \square$$

Beweis (der Carleman Ungleichung von Carleman)**.** (Siehe [DM03, pp. 425–426])
Sei O.B.d.A. $a_j > 0 \; \forall j = 1, \ldots, n$. Gesucht: $\lambda_n := max\{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \mid a_1 + \cdots + a_n = 1\}$.
Nutze Multiplikatiosregel von Lagrange und löse: $grad\ F = 0$, wobei
$F = a_1 + (a_1 a_2)^{1/2} + \cdots + (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} - \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 1)$
$\Rightarrow$ Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + \frac{1}{2a_1}\gamma_2 + \cdots + \frac{1}{na_1}\gamma_n - \lambda \\
0 &= \frac{1}{2a_2}\gamma_2 + \cdots + \frac{1}{na_2}\gamma_n - \lambda \\
&\vdots \\
0 &= \frac{1}{na_n}\gamma_n - \lambda \\
0 &= -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 1)
\end{aligned}$$

$\underset{induktiv}{\Rightarrow} \frac{1}{k}\gamma_k = \lambda_n(a_k - a_{k+1}) \; (k = 1, \ldots, n-1), \; \frac{1}{n}\gamma_n = \lambda_n a_n.$
Definiere: $\omega_k := k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \; (k = 1, 2, \ldots, n-1)$.
Dann gilt: $\lambda_n \omega_k a_k = \gamma_k \; (k = 1, 2, \ldots, n-1), \; \lambda_n n a_n = \gamma_n$ und für $k = 1, 2, \ldots, n-2$:

$$\omega_{k+1}^{k+1} = \left(\frac{\gamma_{k+1}}{\lambda_n a_{k+1}}\right)^{k+1} = \frac{1}{\lambda_n}\omega_k^k\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$$

Definiere dann induktiv: $\Omega_n(\lambda)$ mit: $\Omega_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \quad \Omega_{k+1}(\lambda)^{k+1} := \frac{1}{\lambda}\Omega_k(\lambda)^k\left(1 - \frac{\Omega_k(\lambda)}{k}\right)^{-k}$.
Zeige: $\Omega_n(\lambda_n) = n > \frac{n}{n+1}$ und $\Omega_k(\lambda) < \frac{k}{k+1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ für alle $\lambda \geq e \quad \Rightarrow \lambda_n < e \quad \square$

Erinnerung 6 (Multiplikationsregel von Lagrange)**.** *(Siehe [Sch05])*
f habe in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$ und es sei Rang $\varphi'(x_0) = p$. Dann ex. ein $\lambda \in \mathbb{R}^p$ mit: $F'(x_0, \lambda) = 0$. Dabei gelte: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}), p \in \mathbb{N}, p < n$ und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$, weiter sei $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda\varphi(x)$.

Literatur

[DM03] Duncan, John and Colin McGregor: *Carleman's Inequality.* The American Mathematical Monthly, 110(5):424 – 431, 2003. `https://www.jstor.org/stable/3647829`.

[Gar07] Garling, D.J.H.: *Inequalities: a journey into linear analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 2007, ISBN 978-0-521-69973-0.

[Sch05] Schmoeger, Christoph: *Analysis 2.* `http://mitschriebwiki.nomeata.de/SS10/Ana2Bachelor.pdf`, Vorlesungsmitschrieb, 2005.