Skizzen und Überlegungen zur Integration ab Wintersemester 2011/12

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Kaiserstr. 89, 76133 Karlsruhe
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Lee Peng-Yee: Lanzhou Lectures on Henstock Integration, World Scientific Publishing, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1989.

1 Das Henstock-Integral

Im ganzen Kapitel ist $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$.

1.1. Definition: Sei $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ eine Funktion, $n \in \mathbb{N}$ und

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

sowie $\xi_1, \ldots, \xi_n \in [a, b]$ derart, dass

$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] \subseteq (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dann heißt $D = \{([x_{j-1}, x_j], \xi_j) : j = 1, \ldots, n\}$ eine *δ-feine Zerlegung von* $[a, b]$ von $[a, b]$.

Die Intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ heißen *Teilintervalle* der Zerlegung und die ξ_j heißen *Zwischenpunkte.*

Wie in LPY schreiben wir Zerlegungen auch $D = \{[u, v], \xi\}$, wobei $[u, v]$ ein typisches Teilintervall und ξ einen Zwischenpunkt bezeichnet. Ist $g : [a, b] \times [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ist $D = \{([x_{j-1}, x_j], \xi_j) : j = 1, \ldots, n\}$ eine Zerlegung, so schreiben wir

$$\sum_D g(\xi, u, v) := \sum_{j=1}^{n} g(\xi_j, x_{j-1}, x_j),$$

also zB

$$\sum_D f(\xi)(v-u) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}), \quad \sum_D f(\xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j), \quad \sum_D g(u, v) := \sum_{j=1}^{n} g(x_{j-1}, x_j).$$

Das nächste Lemma sichert die Existenz von δ-feinen Zerlegungen.

1.2. Lemma: Sei $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ eine Funktion. Dann gibt es eine δ-feine Zerlegung.

(Lemma 2.1 in LPY, dort ohne Beweis, aber Hinweis auf Heine-Borel)

Beweis. Wir schreiben $U(\delta, \xi) := (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi))$ für $\xi \in [a, b]$. Dann ist $(U(\delta, \xi))_{\xi \in [a,b]}$ eine offene Überdeckung von $[a, b]$, die eine endliche Teilüberdeckung $(U(\delta, \xi))_{\xi \in F}$ enthält. Diese können wir ohne Einschränkung als minimal annehmen, dh dass wir kein $\xi \in F$ weglassen dürfen. Wir ordnen die Punkte in F der Größe nach: $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$. Wir setzen $x_0 := a$, $x_n := b$ und wählen für jedes $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ ein

$$x_j \in (\xi_j, \xi_{j+1}) \cap (\xi_{j+1} - \delta(\xi_{j+1}), \xi_j + \delta(\xi_j)).$$

Dass dies möglich ist, folgt aus der Minimalität. $\square$

Die grobe Idee beim Henstock-Integral ist, dass die Länge eines Teilintervalles $[u, v]$, das einen Zwischenpunkt ξ enthält, nicht für alle Intervalle gleich vorgegeben ist, sondern von diesem Zwischenpunkt ξ abhängt. Für gewisse ξ kann man so zB erzwingen, dass die sie enthaltenden Teilintervalle sehr klein sein müssen. Somit kann man die zugelassenen Zerlegungen besser an die zu integrierende Funktion anpassen.

Auch folgende Möglichkeit werden wir öfter ausnutzen: Ist $c \in [a, b]$ und $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ eine Funktion mit $\delta(\xi) \leq |\xi - c|$ für alle $\xi \in [a, b] \setminus \{\xi\}$ und D eine δ-feine Zerlegung, so muss c unter den Zwischenpunkten von D vorkommen, da Teilintervalle $[u, v]$ mit Zwischenpunkten $\xi \neq c$ den Punkt c nicht enthalten können. Man kann also erzwingen, dass gewisse Zwischenpunkte in δ-feinen Zerlegungen vorkommen. Hingegen kann man nicht erzwingen, dass fixierte Punkte als Randpunkte von Teilintervallen vorkommen (außer a und b natürlich). Das entspricht der generellen Philosophie, die sich auch oben im Beweis niedergeschlagen hat, dass *zuerst* die Zwischenpunkte gewählt werden und danach die Teilintervalle.

1.3. Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Henstock-integrierbar mit Wert* $A \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta : [a, b] \to (0, \infty) \, \forall \delta\text{-feine Zerl. } D : \left| \sum_D f(\xi)(v - u) - A \right| < \varepsilon.$$

Wir schreiben in diesem Fall

$$A = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f \, dx = \int_a^b f.$$

Die Menge aller Henstock-integrierbaren Funktionen f bezeichnen wir mit $H[a, b]$.

(Definition 2.2 in LPY, aber ohne Bez. $H[a, b]$)

1.4. Beispiele: (1) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt $f \in H[a, b]$ und die Integrale stimmen überein. Das liegt daran, dass man die Riemannsche Definition des Integrals erhält, wenn man in 1.3 nur konstante Funktionen $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ zulässt. Insbesondere ist somit $C[a, b] \subset H[a, b]$. (Example 2.3 in LPY) Außerdem sind Treppenfunktionen und monotone Funktionen Henstock-integrierbar.

(2) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Newton-integrierbar über* $[a, b]$, falls es eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Ein solches F heißt *Stammfunktion* von f auf $[a, b]$. Das Integral von f über $[a, b]$ ist dann $F(b) - F(a)$. (Definition 1.2 in LPY)

Die Funktion $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}) & , x \in (0, 1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, ist differenzierbar , also ist $f := F'$ Newton-integrierbar über $[0, 1]$. Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, aber uneigentlich Riemann-integrierbar über $[0, 1]$. (Example 1.3 in LPY)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Newton-integrierbar über $[a, b]$ und F eine Stammfunktion, so gilt $f \in H[a, b]$ und $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Zu $\varepsilon > 0$ und $\xi \in [a, b]$ finden wir nämlich $\delta = \delta(\xi)$

so, dass für alle $\xi \in [u,v] \subset U(\delta,\xi)$ gilt:

$$|F(\xi) - F(u) - f(\xi)(\xi - u)| \leq \varepsilon|\xi - u|, \quad |F(v) - F(\xi) - f(\xi)(v - \xi)| \leq \varepsilon|v - \xi|,$$

wobei im Fall $\xi \neq u$ bzw $v \neq \xi$ die Ungleichung echt ist. Wir erhalten somit im Fall $u \neq v$:

$$|F(v) - F(u) - f(\xi)(v - u)| < \varepsilon|v - u|.$$

Ist nun D eine δ-feine Zerlegung, so folgt

$$\begin{aligned}\Big|F(b) - F(a) - \sum_D f(\xi)(v-u)\Big| &= \Big|\sum_D (F(v) - F(u) - f(\xi)(v-u))\Big| \\ &\leq \sum_D |F(v) - F(u) - f(\xi)(v-u)| \\ &< \varepsilon \sum_D |v-u| = \varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

und $f \in H[a,b]$, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ ist gezeigt. (p.4 and Example 2.4 in LPY)

Example 2.5 in LPY: $f = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ und Definition *Nullmenge*.

Example 2.6 in LPY: stetige Funktionen direkt.

Example 2.7 in LPY: $f(x) = 1/\sqrt{x}$ direkt.

Henstock-Integral für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (pp. 7/8 in LPY)

Example 2.8 in LPY: $f(x) = x^{-2}$ auf $[1,\infty)$.

1.5. Satz: Sind $f,g \in H[a,b]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt $f+g, \alpha f \in H[a,b]$ und

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f.$$

(Theorem 3.1 in LPY)

Beweis. Setze $A_h := \int_a^b h$ für $h \in \{f,g\}$. Sei $\varepsilon > 0$. Für $h \in \{f,g\}$ gibt es $\delta_h : [a,b] \to (0,\infty)$ so, dass für jede δ_h-feine Zerlegung D gilt

$$\Big|\sum_D h(\xi)(v-u) - A_h\Big| < \varepsilon/2.$$

Setze nun $\delta := \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Dann ist jede δ-feine Zerlegung D sowohl δ_f-fein als auch δ_g-fein, und wir haben somit

$$\Big|\sum_D (f(\xi)+g(\xi))(v-u) - (A_f + A_g)\Big| \leq \Big|\sum_D f(\xi)(v-u) - A_f\Big| + \Big|\sum_D g(\xi)(v-u) - A_g\Big| < \varepsilon.$$

Die Aussage über αf ist leicht. □

1.6. Satz: Sei $c \in (a,b)$ und $f \in H[a,b]$. Dann ist $f|_{[a,c]} \in H[a,c]$ und $f|_{[c,b]} \in H[c,b]$ mit

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

1.7. Folgerung: Ist $f \in H[a,b]$ und $[c,d] \subseteq [a,b]$, so gilt $f|_{[c,d]} \in H[c,d]$.

(Theorem 3.3 in LPY, wird dort mit dem folgenden Cauchykriterium gezeigt)

Zum Beweis von Satz 1.6 verwenden wir das folgende Cauchykriterium.

1.8. Cauchykriterium: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Henstock-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ so gibt, dass für alle δ-feinen Zerlegungen $D = \{[u,v],\xi\}$ und $\widetilde{D} = \{[\tilde{u},\tilde{v}],\tilde{\xi}\}$ gilt:

$$\Big|\sum_D f(\xi)(v-u) - \sum_{\widetilde{D}} f(\tilde{\xi})(\tilde{v}-\tilde{u})\Big| < \varepsilon.$$

(Lemma 3.4 in LPY, dort ohne Beweis)

Beweis. Wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\delta_n : [a,b] \to (0,\infty)$ gemäß Cauchybedingung zu $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ so, dass $\delta_{n+1} \leq \delta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine δ_n-feine Zerlegung D_n. Ist $n_0 \in \mathbb{N}$ und sind $n, m \geq n_0$, so sind D_n und D_m nach Konstruktion δ_{n_0}-fein. Folglich ist

$$\Big(\sum_{D_n} f(\xi)(v-u)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine reelle Cauchyfolge. Deren Grenzwert A ist das Henstock-Integral der Funktion f über $[a,b]$. $\square$

Beweis von Satz 1.6. Wir betrachten zunächst $[a,c]$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ gemäß Cauchybedingung. Seien $D, \widetilde{D}$ δ-feine Zerlegungen von $[a,c]$. Wähle eine δ-feine Zerlegung E von $[c,b]$. Dann sind $D \cup E, \widetilde{D} \cup E$ δ-feine Zerlegungen von $[a,b]$, also

$$\Big|\sum_D - \sum_{\widetilde{D}}\Big| = \Big|\sum_{D\cup E} - \sum_{\widetilde{D}\cup E}\Big| < \varepsilon.$$

Es folgt $f|_{[a,c]} \in H[a,c]$, und genauso zeigt man $f|_{[c,b]} \in H[c,b]$.

Wähle nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\delta_n : [a,b] \to (0,\infty)$ gemäß Cauchybedingung zu $\varepsilon = 1/n$ und δ_n-feine Zerlegungen D_n von $[a,c]$ bzw E_n von $[c,b]$. Dann ist $D_n \cup E_n$ eine δ_n-feine Zerlegung von $[a,b]$, und der Beweis von 1.8 zeigt:

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{D_n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{E_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{D_n \cup E_n} = \int_a^b f.$$

$\square$

Wir zeigen die Umkehrung von 1.6.

1.9. Satz: Sei $c \in (a, b)$. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Henstock-integrierbar über $[a, c]$ und über $[c, b]$, so ist f Henstock-integrierbar über $[a, b]$ und

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $A := \int_a^c f$ und $B := \int_c^b f$. Finde $\delta_1 : [a, c] \to (0, \infty)$ und $\delta_2 : [c, b] \to (0, \infty)$ jeweils für $\varepsilon/2$. Definiere dann $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ durch

$$\delta(\xi) := \begin{cases} \min\{\delta_1(\xi), c - \xi\} & , \xi \in [a, c) \\ \min\{\delta_2(\xi), \xi - c\} & , \xi \in (c, b] \\ \min\{\delta_1(\xi), \delta_2(\xi)\} & , \xi = c \end{cases} .$$

Ist D eine δ-feine Zerlegung von $[a, b]$, so ist c ein Zwischenpunkt von D, dh es gibt $x \in [a, c]$, $y \in [c, b]$ mit $x \neq y$ und $([x, y], c) \in D$ (bei LPY steht, dass c ein "Zerlegungspunkt" von D sei, was aber nicht stimmt!). Es gilt dann

$$\sum_D f(\xi)(v-u) = \sum_{\xi \in D, \xi < c} + \sum_{\xi \in D, \xi > c} + f(c)(y-x) = \sum_{\xi \in D, \xi < c} + f(c)(y-c) + \sum_{\xi \in D, \xi > c} + f(c)(c-x).$$

Setze also $D_1 := \{([u, v], \xi) \in D : \xi < c\} \cup \{([x, c], c)\}$ und $D_2 := \{([u, v], \xi) \in D : \xi > c\} \cup \{([c, y], c)\}$. Dann ist D_1 eine δ_1-feine Zerlegung von $[a, c]$ und D_2 ist eine δ_2-feine Zerlegung von $[c, b]$. Es folgt

$$\Big| \sum_D f(\xi)(v - u) - (F_1(c) + F_2(b)) \Big| \leq \Big| \sum_{D_1} -F_1(c) \Big| + \Big| \sum_{D_2} -F_2(b) \Big| < \varepsilon.$$

□

Anmerkungen: Die Aussage von 1.9 ist Theorem 3.2 in LPY, der dortige Beweis enthält jedoch die erwähnte kleine Lücke. Die Aussage von 1.6 findet sich in LPY nur in Form von 1.7, dh ohne die Formel für die Integrale.

1.10. Nullmengen: Eine Teilmenge $N \subseteq [a, b]$ heißt *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen gibt mit

$$M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{und} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \leq \varepsilon.$$

Hier bezeichnet $|I|$ die *Länge* des Intervals I. Es ist dabei egal, ob die Intervalle abgeschlossen, offen oder halboffen sind. Es ist auch egal, ob man Intervalle in $\mathbb{R}$ oder nur Teilintervalle von $[a, b]$ zulässt.

Wir sagen, dass eine Eigenschaft *fast überall* in $[a, b]$ gilt, wenn es eine Nullmenge $N \subseteq [a, b]$ so gibt, dass die Eigenschaft für alle $x \in [a, b] \setminus N$ gilt.

1.11. Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f = 0$ fast überall. Dann ist $f \in H[a,b]$ und $\int_a^b f = 0$.

(Theorem 3.5 in LPY)

Beweis. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$M_j := \{x \in [a,b] : j-1 < |f(x)| \leq j\}$$

eine Nullmenge. Die Mengen M_j sind dabei paarweise disjunkt. Sei $\varepsilon > 0$. Finde zu jedem j ein $G_j = \bigcup_n I_n^{(j)} \supseteq M_j$, wobei die $I_n^{(j)}$ offene Intervalle sind mit $\sum_n |I_n^{(j)}| < \varepsilon/(j2^j)$. Definiere $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ so, dass $U(\delta,\xi) \subseteq G_j$ für jedes $\xi \in M_j$, $j \in \mathbb{N}$, und beliebig sonst. Ist dann D eine δ-feine Zerlegung, so gilt

$$\begin{aligned} \Big|\sum_D f(\xi)(v-u)\Big| &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{\xi\in D\cap M_j} f(\xi)(v-u)\Big| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\xi\in D\cap M_j} j|v-u| \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} j\,\frac{\varepsilon}{j2^j} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hier bedeutet $\sum\limits_{\xi\in D\cap M_j}$, dass über die Paare $([u,v],\xi) \in D$ mit $\xi \in M_j$ summiert wird. □

1.12. Satz: Sind $f, g \in H[a,b]$ mit $f \leq g$ fast überall, so folgt

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(Theorem 3.6 in LPY)

Beweis. Wegen 1.11 reicht es, den Fall $f \leq g$ auf $[a,b]$ zu betrachten. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein gemeinsames $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ für ε und f, g. Für jede δ-feine Zerlegung D ist dann

$$\int_a^b f - \varepsilon < \sum_D f(\xi)(v-u) \leq \sum_D g(\xi)(v-u) < \int_a^b g + \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt die Behauptung. □

Ist $f \in H[a,b]$, so ist die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f$ nach 1.6 wohldefiniert. Wir nennen F die *Integralfunktion von f*. Beachte, dass für jede Zerlegung D gilt:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = \sum_D F(v) - F(u) = \sum_D \int_u^v f.$$

1.13. Satz: Ist $f \in H[a,b]$ mit Integralfunktion F, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ so, dass für jede δ-feine Zerlegung D gilt

$$\sum_D |F(v) - F(u) - f(\xi)(v-u)| < \varepsilon.$$

(Theorem 3.7 in LPY, dort *Henstock's Lemma* genannt)

Beweis. Die Aussage ist äquivalent zu: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ so, dass für jede δ-feine Zerlegung D und jede Teilmenge $E \subseteq D$ gilt

$$\Big| \sum_E F(v) - F(u) - f(\xi)(v-u) \Big| < \varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ so, dass für jede δ-feine Zerlegung D gilt:

$$\Big| \sum_D (F(v) - F(u) - f(\xi)(v-u)) \Big| < \varepsilon/2.$$

Sei nun $E \subseteq D$ und I die Vereinigung der Teilintervalle von E. Sei J der Abschluss von $[a,b] \setminus I$ (J ist disjunkte Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen). Nach 1.7 ist f Henstock-integrierbar über J, und wir finden eine $\delta|_J$-feine Zerlegung F von J mit

$$\Big| \sum_F (F(v) - F(u) - f(\xi)(v-u)) \Big| < \varepsilon/2.$$

Dann ist $\widetilde{D} := E \cup F$ eine δ-feine Zerlegung von $[a,b]$ und somit

$$\Big| \sum_E (F(v) - F(u) - f(\xi)(v-u)) \Big| \le \Big| \sum_{\widetilde{D}} (\ldots) \Big| + \Big| \sum_F (\ldots) \Big| < \varepsilon.$$

□

1.14. Folgerung: Ist $f \in H[a,b]$, so ist die Integralfunktion F stetig auf $[a,b]$.

Beweis. Sei $c \in [a,b]$. Zu $\varepsilon > 0$ finde $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ gemäß 1.13 für $\varepsilon/2$. Modifiziere δ zu $\widetilde{\delta} : [a,b] \to (0,\infty)$ wie folgt:

$$\widetilde{\delta}(\xi) := \begin{cases} \min\{\delta(\xi), |c-\xi|\} & ,\xi \in [a,b] \setminus \{c\} \\ \min\{\delta(\xi), \frac{\varepsilon}{4|f(c)|+1}\} & ,\xi = c \end{cases}.$$

Gilt nun $c \in [u,v] \subseteq U(\widetilde{\delta}, c)$, so finden wir eine $\widetilde{\delta}$-feine Zerlegung D mit $([u,v],c) \in D$. Da D auch δ-fein ist, wenden wir 1.13 an auf $E = \{([u,v],c)\}$ und erhalten

$$|F(v) - F(u)| \le |F(v) - F(u) - f(c)(v-u)| + |f(c)|(v-u) < \varepsilon/2 + \frac{|f(c)|\varepsilon}{2|f(c)|+1} \le \varepsilon.$$

(Corollary 3.8 in LPY, dort aber nur die erste Abschätzung als Idee) □

2 Konvergenzsätze für das Henstock-Integral

2.1. Monotoner Konvergenzsatz: Sei (f_n) eine Folge in $H[a,b]$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f_n \to f$ punktweise fast überall,
(ii) $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ fast überall,
(iii) $\int_a^b f_n \to A \in \mathbb{R}$.

Dann ist $f \in H[a,b]$ und $\int_a^b f = A$.

Beachte, dass $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in [a,b]$ Teil der Voraussetzung ist.

Beweis. Wegen 1.11 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass (i) und (ii) auf ganz $[a,b]$ gelten. Sei $\varepsilon > 0$. Wir verwenden die Notation $F_n(u,v) := \int_u^v f_n$. Zunächst finden wir wegen (iii) ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq A - F_m(a,b) < \varepsilon, \quad m \geq m_0.$$

Für jedes $\xi \in [a,b]$ finden wir wegen (i) ein $m(\xi) \geq m_0$ mit $|f_{m(\xi)}(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon$. Nach 1.13 finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\delta_n : [a,b] \to (0,\infty)$ so, dass für jede δ_n-feine Zerlegung D gilt:

$$\sum_D |F_n(u,v) - f(\xi)(v-u)| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Definiere nun $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ durch $\delta(\xi) := \delta_{m(\xi)}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$. Sei nun D eine δ-feine Zerlegung. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $E_n := \{([u,v],\xi) \in D : m(\xi) = n\}$ und $D_n \supset E_n$ werde als δ_n-feine Zerlegung von $[a,b]$ gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Big|\sum_D f(\xi)(v-u) - A\Big| \quad &\leq \quad \sum_D |f(\xi) - f_{m(\xi)}(\xi)|(v-u) + \sum_D |f_{m(\xi)}(\xi)(v-u) - F_{m(\xi)}(u,v)| \\ &\quad + \Big|\sum_D F_{m(\xi)}(u,v) - A\Big|\end{aligned}$$

Der erste Term ist $< \varepsilon(b-a)$. Wir schätzen den zweiten Term ab:

$$\sum_D |f_{m(\xi)}(\xi)(v-u) - F_{m(\xi)}(u,v)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{E_n} |f_n(\xi)(v-u) - F_n(u,v)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{D_n} |\ldots| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Für den dritten Term nutzen wir die Monotonie in (ii). Setzen wir

$$m := \min\{m(\xi) : \xi \in D\}, \quad M := \max\{m(\xi) : \xi \in D\},$$

so haben wir $m \geq m_0$ und

$$F_m(a,b) = \sum_D F_m(u,v) \leq \sum_D F_{m(\xi)}(u,v) \leq \sum_D F_M(u,v) = F_M(a,b) \leq A,$$

also ist auch der dritte Term $< \varepsilon$ nach Wahl von m_0. $\square$

(Theorem 4.1 in LPY)

2.2. Lemma: Seien $f_1, f_2 \in H[a,b]$ mit $g \le f_j \le h$ fast überall, wobei $g, h \in H[a,b]$. Dann gilt $\max\{f_1, f_2\}, \min\{f_1, f_2\} \in H[a,b]$.

Beweis. (i) Sei zunächst $g(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. Sei $F_j(u,v) := \int_u^v f_j$ und

$$F^*(u,v) := \max\{F_1(u,v), F_2(u,v)\} \quad \text{für alle } [u,v] \subseteq [a,b].$$

Für $a \le x < y < z \le b$ gilt dann

$$F^*(x,z) \le F^*(x,y) + F^*(y,z),$$

und für jede Zerlegung D von $[a,b]$ gilt wegen der Monotonie des Integrals

$$0 \le \sum_D F^*(u,v) \le \int_a^b h.$$

Insbesondere ist

$$A := \sup\{\sum_D F^*(u,v) : \ D \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\,\} \in \mathbb{R}.$$

Wir zeigen $A = \int_a^b \max\{f_1, f_2\}$. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass für jede δ-feine Zerlegung D gilt

$$\sum_D |f_j(\xi)(v-u) - F_j(u,v)| < \varepsilon \quad (j = 1,2).$$

Definiere für $j = 1,2$ und $a \le x < z \le b$:

$$\chi_j(x,y) := \sup\{\sum_D |f_j(\xi)(v-u) - F_j(u,v)| : \ D \text{ ist } \delta\text{-feine Zerl. von } [x,y]\,\}.$$

Dann gilt für alle $a \le x < y < z \le b$ und $j = 1,2$:

$$\chi_j(x,y) + \chi_j(y,z) \le \chi_j(x,z)$$

und $\chi_j(a,b) \le \varepsilon$. Ist nun D eine δ-feine Zerlegung, so gilt

$$f_j(\xi)(v-u) = f_j(\xi)(v-u) - F_j(u,v) + F_j(u,v) \le F^*(u,v) + \chi_j(u,v),$$

also mit $f := \max\{f_1, f_2\}$:

$$f(\xi)(v-u) \le F^*(u,v) + \chi_1(u,v) + \chi_2(u,v).$$

Außerdem ist

$$f(\xi)(v-u) \ge f_j(\xi)(v-u) - F_j(u,v) + F_j(u,v) \ge F_j(u,v) - \chi_j(u,v)$$

und somit

$$f(\xi)(v-u) \geq F^*(u,v) - \chi_1(u,v) - \chi_2(u,v).$$

Zusammen erhalten wir

$$|f(\xi)(v-u) - F^*(u,v)| \leq \chi_1(u,v) + \chi_2(u,v),$$

woraus durch Summation folgt:

$$\sum_D |f(\xi)(v-u) - F^*(u,v)| \leq 2\varepsilon.$$

Wähle nun eine Zerlegung D_1 mit $\sum_{D_1} F^*(u,v) > A - \varepsilon$. Sei $m := |D_2|$. Da F_j stetig ist, gibt es $\delta_0 > 0$ mit

$$|F_j(u,v)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{für } |u-v| < \delta_0.$$

Wir modifizieren $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ nun wie folgt:

$$\widetilde{\delta}(\xi) := \begin{cases} \min\{\delta(\xi), d(\xi, D_1)\} & , \xi \notin D_1 \\ \delta_0/2 & , \xi \in D_1 \end{cases}.$$

Ist D eine $\widetilde{\delta}$-feine Zerlegung, so kommen die Punkte aus D_1 unter den ξ aus D vor. Somit gilt für die Teilintervalle $[u,v]$ von D: entweder ist $[u,v]$ enthalten in einem Teilintervall von D_1 oder $|v-u| < \delta_0$. Somit gilt

$$\sum_D F^*(u,v) = \sum_{D;\xi \in D \setminus D_1} F^*(u,v) + \sum_{D;\xi \in D_1} F^*(u,v),$$

wobei

$$0 \leq \sum_{D;\xi \in D_1} F^*(u,v) \leq \sum_{D;\xi \in D_1} (F^*(u,\xi) + F^*(\xi,v)) \leq m \cdot \frac{2\varepsilon}{m} = 2\varepsilon$$

und

$$\sum_{D;\xi \in D \setminus D_1} F^*(u,v) + \sum_{D;\xi \in D_1} (F^*(u,\xi) + F^*(\xi,v)) \geq \sum_{D_1} F^*(u,v) > A - \varepsilon.$$

Somit gilt insbesondere

$$\sum_D F^*(u,v) \geq \sum_{D;\xi \in D \setminus D_1} F^*(u,v) > A - 3\varepsilon$$

für jede $\widetilde{\delta}$-feine Zerlegung D. Insgesamt erhalten wir

$$\Big| \sum_D f(\xi)(v-u) - A \Big| \leq \Big| \sum_D (f(\xi)(v-u) - F^*(u,v)) \Big| + \Big| \sum_D F^*(u,v) - A \Big| < 5\varepsilon$$

für jede $\widetilde{\delta}$-feine Zerlegung D.

(ii) Im allgemeinen Fall $g \leq f_j \leq h$ ist $0 \leq f_j - g \leq h - g$ und $\max\{f_1 - g, f_2 - g\} \in H[a,b]$, also auch

$$\max\{f_1, f_2\} = \max\{f_1 - g, f_2 - g\} + g \in H[a,b].$$

(iii) Wegen $\min\{f_1, f_2\} = -\max\{-f_1, -f_2\}$ folgt auch die Aussage über das Minimum. $\square$

2.3. Diskussion der Voraussetzung: (a) Sind $f_1, f_2 \in H[a,b]$ mit $f_1, f_2 \geq 0$, so kann man $h = f_1 + f_2$ nehmen.

(b) Sind $f_1, f_2, g \in H[a,b]$ mit $g \leq f_1, f_2$, so ist $0 \leq f_1 - g, f_2 - g$ und man kann $h = f_1 + f_2 - g$ nehmen.

(c) Sind $f_1, f_2, h \in H[a,b]$ mit $f_1, f_2 \leq h$, so kann man $g = f_1 + f_2 - h$ nehmen.

(d) Zwei Funktionen $f_1, f_2 \in H[a,b]$ haben also eine gemeinsame Minorante genau dann, wenn sie eine gemeinsame Majorante haben bzw. genau dann wenn $\min\{f_1, f_2\}, \max\{f_1, f_2\} \in H[a,b]$ oder auch nur eines von beiden zu $H[a,b]$ gehört.

(e) Wenn F_1, F_2 von beschränkter Variation sind, so ist A ebenfalls endlich, und man zeigt genauso, dass $\max\{f_1, f_2\}, \min\{f_1, f_2\} \in H[a,b]$ folgt ... Insbesondere gilt für $f \in H[a,b]$ mit $F \in BV[a,b]$, dass auch $|f| \in H[a,b]$.

Außerdem: Ist $f \in H[a,b]$ mit $|f| \in H[a,b]$, so sind auch alle abgeschnittenen Funktionen $f_N := (f \wedge N) \vee (-N)$ in $H[a,b]$. ...

2.4. Satz: Sei (f_n) eine Folge in $H[a,b]$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f_n \to f$ fast überall für $n \to \infty$,

(ii) es gibt $g, h \in H[a,b]$ mit $g \leq f_n \leq h$ fast überall für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $f \in H[a,b]$ und $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ für $n \to \infty$.

Beweis. Sei $j \in \mathbb{N}$ fest und $g_k := \min\{f_n : j \leq n \leq k\}$ für $k \geq j$. Nach Lemma 2.2 ist $g_k \in H[a,b]$. Außerdem gilt $-g_k \leq -g_{k+1}$ und

$$-\int_a^b g_k \leq -\int_a^b g < \infty.$$

Nach 2.1 ist dann

$$g_j^* := \lim_{k\to\infty} g_k = \inf\{f_n : n \geq j\} \in H[a,b]$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$. Genauso ist für festes $j \in \mathbb{N}$ die Funktion $h_k := \max\{f_n : j \leq n \leq k\} \in H[a,b]$ mit $h_k \leq h_{k+1}$ und $\int_a^b h_k \leq \int_a^b h < \infty$. Nach 2.1 ist also

$$h_j^* := \lim_{k\to\infty} h_k = \sup\{f_n : n \geq j\} \in H[a,b]$$

für jedes j. Nun ist $(g_j^*)_j$ eine monoton wachsende Folge in $H[a,b]$ mit $g_j^* \to f$ fast überall und $\int_a^b g_j^* \leq \int_a^b h < \infty$, und (h_j^*) ist eine monoton fallende Folge in $H[a,b]$ mit $h_j^* \to f$ fast überall und $\int_a^b h_j^* \geq \int_a^b g > -\infty$. Nach 2.1 ist $f \in H[a,b]$ und

$$\int_a^b g_j^* \to \int_a^b f \ (j \to \infty), \quad \int_a^b h_j^* \to \int_a^b f \ (j \to \infty).$$

Da für jedes j gilt:

$$\int_a^b g_j^* \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h_j^*,$$

folgt dann auch $\int_a^b f_j \to \int_a^b f$ für $j \to \infty$. $\square$

2.5. Korollar: Sei (f_n) eine Folge in $H[a,b]$ mit $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f_n \to f$ fast überall. Falls die reelle Folge $(\int_a^b f_n)_n$ beschränkt ist, so ist $f \in H[a,b]$ und

$$\int_a^b f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Beweis. Nach 2.3 gilt

$$\max\{f_n : j \leq n \leq k\}, \min\{f_n : j \leq n \leq k\} \in H[a,b], \quad \text{für alle } j,k.$$

Da außerdem gilt

$$0 \leq \min\{f_n : j \leq n \leq k\} \leq f_j \quad \text{für alle } k \geq j,$$

ist $\inf\{f_n : n \geq j\} \in H[a,b]$ nach 2.1 und

$$\begin{aligned} \int_a^b \inf\{f_n : n \geq j\} &= \lim_{k\to\infty} \int_a^b \min\{f_n : j \leq n \leq k\} \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \min\left\{ \int_a^b f_n : j \leq n \leq k \right\} \\ &= \inf\left\{ \int_a^b f_n : n \geq j \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber die Folge $\inf\{f_n : n \geq j\}$ monoton wachsend und konvergiert fast überall gegen f. Da wegen der Voraussetzung gilt

$$\int_a^b \inf\{f_n : n \geq j\} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n < \infty,$$

ist $f = \lim_{j\to\infty} \inf\{f_n : n \geq j\} \in H[a,b]$ nach 2.1 und

$$\int_a^b f = \lim_{j\to\infty} \int_a^b \inf\{f_n : n \geq j\} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n,$$

womit das Korollar gezeigt ist. $\square$

Ist $f \in H[a,b]$ mit $|f| \in H[a,b]$, so gilt für die abgeschnittenen Funktionen f_N von oben:

$$\int_a^b |f - f_N| \to 0 \quad (N \to \infty).$$

...

3 Messbarkeit

3.1. Definition: Eine Teilmenge $M \subseteq [a,b]$ heißt *messbar*, wenn $1_M \in H[a,b]$. Für eine messbare Menge $M \subseteq [a,b]$ definieren wir $\mu(M) := \int_a^b 1_M$.

Bemerkung: Alle Nullmengen und alle Intervalle sind messbar.

3.2. Lemma: Die Menge $\mathscr{M}[a,b]$ aller messbaren Teilmengen von $[a,b]$ ist eine *σ-Algebra in* $[a,b]$, dh es gilt

(i) $[a,b] \in \mathscr{M}[a,b]$,

(ii) für jedes $M \in \mathscr{M}[a,b]$ gilt auch $[a,b] \setminus M \in \mathscr{M}[a,b]$,

(iii) für jede Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{M}[a,b]$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathscr{M}[a,b]$.

Außerdem ist $\mu : \mathscr{M}[a,b] \to [0,\infty)$ *σ-additiv*, dh für jede Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathscr{M}[a,b]$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\Big).$$

Beweis. Es gilt $[a,b] \in \mathscr{M}$. Ist $M \in \mathscr{M}[a,b]$, also $1_M \in H[a,b]$, so folgt $1 - 1_M \in H[a,b]$ aus der Linearität des Integrals. Somit ist $[a,b] \setminus M \in \mathscr{M}[a,b]$. Ist (M_n) eine Folge in $\mathscr{M}$ und $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, so setze $Q_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen 2.2 ist (1_{Q_n}) eine monoton wachsende Folge in $H[a,b]$, die punktweise gegen 1_M konvergiert. Da $(\int_a^b 1_{Q_n})$ durch $b-a$ beschränkt ist, folgt $1_M \in H[a,b]$ aus 2.1, und somit gilt $M \in \mathscr{M}$. Wir erhalten so auch $\mu(M) = \lim_n \mu(Q_n)$. Sind die M_n paarweise disjunkt, so gilt außerdem $\mu(Q_n) = \sum_{j=1}^n \mu(M_j)$ nach 1.5. Beides zusammen impliziert $\mu(M) = \sum_{j=1}^\infty \mu(M_j)$. $\square$

$H[a,b]$ enthält die Menge $\mathscr{E}[a,b]$ aller *einfachen Funktionen*, dh den von den charakteristischen Funktionen 1_M, $M \in \mathscr{M}[a,b]$ aufgespannten Teilraum.

3.3. Lemma: Ist (φ_n) eine monoton wachsende Folge in $\mathscr{E}[a,b]$ und $f \in H[a,b]$ mit $\varphi_n \le f$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\varphi := lim_n \varphi_n \in H[a,b]$ und $\int_a^b \varphi = \lim_n \int_a^b \varphi_n$.

Das folgt aus 2.2. Ziel ist natürlich, die Aussage unter der schwächeren Voraussetzung $\sup_n \int_a^b \varphi_n < \infty$ zu haben. Da 2.2 jedoch auch $\sup_n \varphi_n(x) < \infty$ für (fast) jedes $x \in [a,b]$ voraussetzt, ist dies noch nicht möglich.

3.4. Lemma: Sei $f \in H[a,b]$ mit $f \ge 0$. Dann gilt $\{f \ge c\} \in \mathscr{M}[a,b]$ für jedes $c > 0$.

Beweis. Es reicht, den Fall $c = 1$ zu betrachten. Nach 2.2 gehören die folgendermaßen definierten Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$ zu $H[a,b]$:

$$f_n(x) := n \max\{\min\{f(x), 1\}, 1 - \frac{1}{n}\} - (1 - \frac{1}{n})\}, \quad x \in [a,b].$$

Beachte, dass gilt

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & , f(x) \geq 1 \\ 0 & , f(x) \leq 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - n(f(x) - 1)) & , 1 - \frac{1}{n} < f(x) < 1 \end{cases} .$$

Die Folge (f_n) ist monoton fallend und konvergiert punktweise gegen $1_{\{f \geq 1\}}$. Nach 2.1 ist dann $1_{\{f \geq 1\}} \in H[a, b]$, also $\{f \geq 1\} \in \mathscr{M}[a, b]$. □

3.5. Folgerung: Ist $f \in H[a, b]$ mit $f \geq 0$, so gibt es eine monoton wachsende Folge (φ_n) in $\mathscr{E}[a, b]$, die punktweise gegen f konvergiert.

In dieser Situation gilt wegen 2.2: $\sup_n \int_a^b \varphi_n = \int_a^b f$.

Beweis. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}$.

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} 1_{\{k/n < f \leq k/(n+1)\}}.$$

□

3.6. Lemma: Sei (f_n) eine Folge in $H[a, b]$ mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. Setze $f : [a, b] \to [0, \infty]$, $f(x) := \sup_n f_n(x)$. Dann gilt $\{f \leq c\} \in \mathscr{M}[a, b]$ für jedes $c > 0$ und $\{f = \infty\} \in \mathscr{M}[a, b]$.

Beweis. Für $c > 0$ gilt

$$\{f \leq c\} = \bigcap_n \{f_n \leq c\} \in \mathscr{M}[a, b].$$

Weiter ist

$$\{f = \infty\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n > m\} \in \mathscr{M}[a, b].$$

□

3.7. Lemma: Sei (f_n) eine Folge in $H[a, b]$ mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. Setze $f : [a, b] \to [0, \infty]$, $f(x) := \sup_n f_n(x)$. Dann gilt:

$$\sup_n \int_a^b f_n < \infty \iff \{f = \infty\} \text{ ist eine Nullmenge.}$$

Beweis. "$\Longleftarrow$" folgt aus 2.2. Ist $\{f = \infty\}$ keine Nullmenge, so finden wir $\gamma > 0$ so, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $\mu(\bigcup_n \{f_n > m\}) > \gamma$. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $n(m) \in N$ mit $\mu(\{f_{n(m)} > m\}) \geq \gamma$. Folglich ist

$$\int_a^b f_{n(m)} \geq m \int_a^b 1_{\{f_{n(m)} > m\}} = m\mu(\{f_{n(m)} > m\}) \geq m\gamma$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ und somit $\sup_n \int_a^b f = \infty$. □

3.8. Satz: Sei (f_n) eine Folge in $H[a,b]$ mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ fast überall und $A := \sup_n \int_a^b f_n < \infty$. Definiert man $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \sup_n f_n(x) & , \sup_n f_n(x) < \infty \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} ,$$

so folgt $f \in H[a,b]$ und $\int_a^b f = A$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ punktweise auf $[a,b]$. Nach 3.7 ist $\{\sup_n f_n = \infty\}$ eine Nullmenge, so dass $\sup_n f_n = f$ fast überall. Aus 2.1 folgt $f \in H[a,b]$ und $A = \int_a^b f$. $\square$

Wir nehmen 3.7 zum Anlass für folgende

3.9. Definition: Sei $f : [a,b] \to [0,\infty]$ punktweiser Limes einer monoton wachsenden Folge (φ_n) in $\mathscr{E}[a,b]$ mit $\varphi_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir

$$\int_a^b f := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b \varphi_n \in [0,\infty].$$

Jetzt noch die Cauchy-Folgerung aus LPY:

3.10. Satz: Sei (f_n) eine Folge in $H[a,b]$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f_n \to f$ fast überall für $n \to \infty$,

(ii) für alle n, m gilt $\int_a^b |f_n - f_m| < \infty$ und $\int_a^b |f_n - f_m| \to 0$ für $n, m \to \infty$.

Dann gilt $f \in H[a,b]$ und $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ für $n \to \infty$.