18.06.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

Wiederholung zum stetigen Funktionalkalkül

In diesem Abschnitt möchten wir einige Dinge zum stetigen Funktionalkalkül aus der Vorlesung wiederholen. Für die meisten Beweise siehe das jeweilige Skript bzw. Vorlesungsmitschieb.

Satz: (Stetiger Funktionalkalkül) Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbst-adjungiert. Dann gibt es genau eine Abbildung

$$\Phi_T : C^0\left(\sigma(T)\right) \to L(H),\ f \mapsto f(T)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(C1) (Linearität) Φ_T ist linear.

(C2) (Beschränktheit) $\|f(T)\|_{L(H)} = \|f\|_{C^0(\sigma(T))} = \sup\limits_{x\in\sigma(T)} |f(x)|$ für alle $f \in C^0\left(\sigma(T)\right)$.

(C3) (Normiertheit) $\chi_{\sigma(T)}(T) = \mathrm{Id}_H$ und $\mathrm{Id}_{\sigma(T)}(T) = T$.

(C4) (Multiplikativität) Φ_T ist multiplikativ, d.h. $\Phi_T(fg) = \Phi_T(f)\Phi_T(g) = \Phi_T(g)\Phi_T(f)$ für alle $f, g \in C^0(\sigma(T))$.

(C5) (Adjungiertheit) $f(T)^* = \overline{f}\left(T^*\right) = \overline{f}(T)$ für alle $f \in C^0(\sigma(T))$.

Diese Eigenschaften legen den Kalkül eindeutig fest. Daraus ergeben sich nun noch weitere Eigenschaften:

(C6) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(\sigma(T)), f \in C^0(\sigma(T))$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ gleichmäßig auf $\sigma(T)$, so folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(T) = f(T)$ in $L(H)$.

(C7) $f(T)$ ist normal für alle $f \in C^0(\sigma(T))$.

(C8) Sei $f \in C^0(\sigma(T))$. Dann ist:

$$f(T) \in L(H) \text{ ist selbst-adjungiert } \Leftrightarrow\ f \text{ ist reell-wertig.}$$