18.04.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

IV. Wiederholung zu abgeschlossenen Operatoren

In diesem Abschnitt möchten wir einige Dinge zu abgeschlossenen Operatoren aus der Vorlesung wiederholen und gegebenenfalls die Notation anpassen, zugleich werden wir einige Zusätze kennenlernen, die aber praktisch sind zu wissen. Für die meisten Beweise siehe das jeweilige Skript bzw. Vorlesungsmitschieb. Seien hier durchweg $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei $\mathbb{K}$-Banachräume mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition IV.1.: (Abgeschlossene Operatoren) Zu einem nicht-leeren linearen Teilraum $D(A) \subseteq X$ sei $A\colon D(A) \to Y$ ein linearer Operator. Dann nennen wir A einen abgeschlossenen Operator, falls der zugehörige Graph

$$\operatorname{graph}(A) := \{(x, Ax) \colon x \in D(A)\} \subseteq X \times Y$$

abgeschlossen ist in $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y \text{ für } (x,y) \in X \times Y.$$

Satz IV.2.: (Äquivalente Charakterisierung) Sei $A\colon D(A) \subseteq X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen.

(ii) $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ist ein Banachraum und mit $\|\cdot\|_A$ bezeichnen wir die Graphennorm von A, d.h.

$$\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y \text{ für } x \in D(A).$$

(iii) Für alle Folgen $(x_n)_{x\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$ und $y \in Y$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in X und $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ in Y folgt:

$$x \in D(A) \text{ mit } Ax = y.$$

Satz IV.3.: (Satz vom abgeschlossenen Graphen) Sei $A\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Dann gilt die Äquivalenz:

$$A \text{ abgeschlossen } \Leftrightarrow A \text{ stetig/ beschränkt.}$$

Bemerkung: Abgeschlossene Operatoren verallgemeinern demnach stetige/ beschränkte Operatoren.

Satz IV.4.: (Eigenschaften abgeschlossener Operatoren) Seien $(Z, \|\cdot\|_Z)$ ein weiterer $\mathbb{K}$-Banachraum, sowie $A\colon D(A) \subseteq X \to Y$ ein linearer abgeschlossener Operator, $T \in L(X,Y)$ und $S \in L(Z,X)$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) Der Kern von A

$$\ker(A) := \{x \in D(A) \colon Ax = 0\} \subseteq X$$

ist ein abgeschlossener Untervektorraum von X; hingegen das Bild von A

$$\operatorname{range}(A) := \{y \in Y : \text{es existiert ein } x \in D(A) \text{ mit } Ax = y\} \subseteq Y$$

muss nicht zwingend abgeschlossen in Y sein.

(ii) Sei $B\colon D(B) \subseteq Y \to X$ ein bijektiver linearer Operator mit stetiger Inversen B^{-1}, so ist die Verkettung $C = BA$ mit Definitionsbereich $D(C) := \{x \in D(A) \colon Ax \in D(B)\}$ abgeschlossen.

(iii) Sei $B\colon D(B) = D(A) \subseteq X \to Y$ ein linearer Operator, der A-beschränkt ist, d.h. es existieren Konstanten $a \in [0,1)$ und $b \geq 0$ mit

$$\|Bx\|_Y \leq a\|Ax\|_Y + b\|x\|_X \text{ für alle } x \in D(B) = D(A),$$

dann ist die Summe $C := A + B$ mit $D(C) = D(A)$ abgeschlossen.

(iv) Die Summe $B := A + T$ mit $D(B) = D(A)$ ist abgeschlossen.

(v) Die Verkettung $C := AS$ mit $D(C) := \{z \in Z \colon Sz \in D(A)\}$ ist abgeschlossen.

(vi) Ist A zusätzlich injektiv, so ist das Inverse $A^{-1} \colon \mathrm{range}(A) \subseteq Y \to X$ mit $D\left(A^{-1}\right) = \mathrm{range}(A)$ abgeschlossen.