04.07.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

Wiederholung Satz von Riesz und Dinge zu Lax-Milgram

Ist $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum, so wissen aus der Funktionalanalysis, dass H isomorph zu seinem Dualraum $H' = L(H, \mathbb{C})$ ist. Dies ist gerade die Aussage des Satzes von Riesz:

Satz: (Satz von Riesz (Antilinear-Version))
Ist $\varphi\colon H \to \mathbb{C}$ eine antilineare, stetige Abbildung, dann gibt es ein eindeutiges $w \in H$ mit

$$\varphi(u) = \langle w, u\rangle_H \text{ für alle } u \in H.$$

Weiter ist die Abbildung $\varphi \mapsto w$ eine lineare, stetige Bijektion von H' auf H mit

$$\|w\|_H = \|\varphi\|_{H'}.$$

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Sätze von Lax-Milgram beweisen:

Satz: (Satz von Lax-Milgram (Isomorphie-Version)):
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ ein Hilbertraum. Ist $a\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine V-elliptische, stetige Sesquilinear-Form auf $V \times V$, d.h.

$$|a(u,u)| \geq \lambda \|u\|_V^2 \text{ für alle } u \in V$$

für eine Konstante $\lambda > 0$, dann gibt es einen Isomorphismus $A\colon V \to V$ mit

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle_V \text{ für alle } u, v \in V.$$

Satz: (Satz von Lax-Milgram (Unbeschränkte Version))
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein weiterer Hilbertraum mit $V \subseteq H$ dicht und stetiger Injektion $J\colon V \to H,\ x \mapsto x$. Ist weiter $a\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine V-elliptische, stetige Sesquilinear-Form auf $V \times V$, d.h.

$$|a(u,u)| \geq \lambda \|u\|_V^2 \text{ für alle } u \in V$$

für eine Konstante $\lambda > 0$, dann gibt es einen linearen, bijektiven (unbeschränkten) Operator $S\colon D(S) \subseteq V \subseteq H \to H$ mit $S^{-1} \in L(H)$ und mit

$$a(u,v) = \langle Su, v\rangle_H \text{ für alle } u \in D(S) \text{ und } v \in V.$$

Zusätzlich ist $D(S) \subseteq H$ dicht.

Dieser Satz bzw. die Konstruktion von S gibt uns einen Zusammenhang zwischen der Form a und dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Damit lassen sich auch verschiedene Skalarprodukte miteinander in Verbindung setzen.

Beweis vom Satz von Lax-Milgram (Isomorphie-Version):

Konstruktion von A: Für jedes $u \in V$ ist $a(u,\cdot)\colon V \to V$ antilinear und stetig, da a stetig ist auf $V \times V$. Nach dem Satz von Riesz existiert ein eindeutiges Element $w \in V$ mit

$$a(u,v) = \langle w, v\rangle_V \text{ für alle} v \in V.$$

Definiere $Au := w$. Dann ist $A\colon V \to V$ wohl-definiert und linear.
Weiter ist A auch stetig auf V, da die Form a stetig ist auf $V \times V$ und so für alle $u \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} &\|Au\|_V^2 = |\langle Au, Au\rangle_V| = |a(u, Au)| \leq C_a \|u\|_V \|Au\|_V \\ \Leftrightarrow\ &\|Au\|_V \leq C_a \|u\|_V. \end{aligned}$$

A **ist injektiv**: Aus der V-Elliptizität von a und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir:

$$\lambda \|u\|_V^2 \leq |a(u,u)| = |\langle Au, u\rangle_V| \leq \|Au\|_V \|u\|_V$$

für alle $u \in V$. Daraus erhalten wir für alle $u \in V\backslash\{0\}$:

$$0 < \lambda \|u\|_V \leq \|Au\|_V \qquad (*)$$

d.h. A ist injektiv.
range$(A) \subseteq V$ **ist dicht**: Sei $u \in V$ mit

$$\langle Av, u\rangle_V = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Wähle $v = u$ und nutze die V-Elliptizität von a:

$$0 = |\langle Au, u\rangle_V| = |a(u,u)| \geq \lambda \|u\|_V^2 \geq 0,$$

also ist $v = 0$. Damit folgt: range$(A)^\perp = \{0\}$. Also ist

$$\overline{\text{range}(A)}^{\|\cdot\|_V} = \text{range}(A)^{\perp\perp} = V,$$

d.h. range(A) ist dicht in V.
range$(A) \subseteq V$ **ist abgeschlossen**: Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq$ range(A) eine Cauchy-Folge und wähle eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ mit $Au_n = v_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. So gibt es wegen der Cauchy-Folgeneigenschaft einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|A(u_n - u_m)\|_V = \|Au_n - Au_m\|_V = \|v_n - v_m\|_V < \varepsilon \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n, m \geq n_0.$$

Wegen $(*)$ gilt nun:

$$\lambda \|u_n - u_m\|_V \leq \|A(u_n - u_m)\|_V < \varepsilon \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n, m \geq n_0,$$

d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ ist eine Cauchy-Folge. Da V als Hilbertraum vollständig ist, konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V und es gibt ein $u \in V$ mit

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \,|textin\, V.$$

Wegen der Stetigkeit von A folgt nun für $v := Au$:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} Au_n = Au = v \in \text{range}(A) \text{ in } V.$$

Also ist range(A) abgeschlossen (da jede konvergente Folge automatisch eine Cauchy-Folge ist).
A^{-1} **ist stetig**: Dies folgt ebenfalls aus $(*)$, denn es gilt für alle $v \in V$:

$$\left\|A^{-1}v\right\|_V \leq \frac{1}{\lambda} \left\|AA^{-1}v\right\|_V = \frac{1}{\lambda} \|v\|_V .$$

$\square$

Beweis vom Satz von Lax-Milgram (Unbeschränkte Version):

Konstruktion von S: Wir definieren erst

$$D(S) := \{u \in V | v \mapsto a(u,v) \text{ ist stetig auf } V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_H\text{-Norm}\} \subseteq V \subseteq H.$$

Zu jedem $u \in D(S)$ können wir auf Grund der Dichtheit von V in H den Operator $a(u,\cdot)$ eindeutig auf H stetig zu $\widetilde{a}(u,\cdot)$ fortsetzen. Da $a(u,\cdot)$ antilinear ist, ist auch $\widetilde{a}(u,\cdot)$ antilinear. Nach dem Satz von Riesz existiert ein eindeutiges $w \in H$ mit

$$\widetilde{a}(u,h) = \langle w, h\rangle_H \text{ für alle } h \in H.$$

Also folgt:

$$a(u,v) = \widetilde{a}(u,v) = \langle w, v\rangle_H \text{ für allev} \in V.$$

Wir setzen nun $Su = w$. Damit ist S wohl-definiert und linear, da das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ in der ersten Komponente linear ist.
S **ist injektiv**: Wegen der stetigen Injektion J und der V-Elliptizität folgt:

$$\begin{aligned}(*)\ \lambda \|u\|_H^2 \leq C^2\lambda \|u\|_V^2 \leq C^2 |a(u,u)| &= C^2 |\langle Su, u\rangle_H| \\ &\leq C^2 \|Su\|_H \|u\|_H \text{ für alle } u \in D(S)\end{aligned}$$

nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Also gilt für alle $u \in D(S)\backslash\{0\}$:

$$0 < \lambda \|u\|_H \leq C^2 \|Su\|_H ,$$

d.h. S ist injektiv.
S **ist surjektiv**: Sei $h \in H$. Setze $\varphi(v) := \langle h, v \rangle_H$ für $v \in V$. Dann ist φ auf V antilinear, da das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ in der zweiten Komponente antilinear ist und stetig auf V, da wir nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und wegen der stetigen Injektion J

$$|\varphi(v)| = |\langle h, v \rangle_H| \leq \|h\|_H \|v\|_H \leq C \|h\|_H \|v\|_V$$

für alle $v \in V$ haben. Also folgt nach dem Satz von Riesz, dass es ein eindeutiges $w \in V$ gibt mit

$$\langle h, v \rangle_H = \varphi(v) = \langle w, v \rangle_V \text{ für alle } v \in V.$$

Setzen wir $u := A^{-1}w \in V$, da $A \colon V \to V$ ein Isomorphismus ist, so gilt:

$$a(u, v) = \langle w, v \rangle_V \text{ für alle } v \in V.$$

Weiter ist nun $u \in D(S)$, da $a(u, \cdot)$ antilinear ist auf V und es gilt:

$$a(u, v) = \langle w, v \rangle_V = \langle h, v \rangle_H \text{ für alle } v \in V,$$

also auch

$$|a(u, v)| = |\langle h, v \rangle_H| \leq \|h\|_H \|v\|_H \text{ für alle } v \in V$$

nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, d.h. $a(u, \cdot)$ ist stetig auf V bzgl. der $\|\cdot\|_H$-Norm. Damit folgt nun

$$\langle Su, v \rangle_H = a(u, v) = \langle h, v \rangle_H \text{ für alle } v \in V.$$

Damit gilt (da $V \subseteq H$ dicht ist):

$$Su = h \in H.$$

Also ist S surjektiv und damit nun auch bijektiv.
S^{-1} **stetig**: Also existiert formal S^{-1}. Nach $(*)$ gilt:

$$\left\|S^{-1}h\right\|_H \leq \frac{C}{\lambda} \left\|SS^{-1}h\right\|_H = \frac{C}{\lambda} \|h\|_H \text{ für alle } h \in H.$$

Damit ist S^{-1} linear und stetig, also ist $S^{-1} \in L(H)$.
Dichtheit von $D(S) \subseteq H$: Sei $h \in H$ mit

$$\langle h, u \rangle_H = 0 \text{ für alle } u \in D(S).$$

Da S insbesondere surjektiv ist, finden wir ein $v \in D(S)$ mit $Sv = h$. Also muss nun gelten:

$$\langle Sv, u \rangle_H = \langle h, u \rangle_H = 0.$$

Aus der V-Elliptizität erhalten wir nun für $u = v$:

$$0 = \langle Sv, v \rangle_H = a(v, v) \geq \lambda \|v\|_V^2 \geq 0,$$

d.h. $v = 0$, was $h = Sv = 0$ impliziert. Also ist $D(S)^\perp = \{0\}$ und damit

$$\overline{D(S)}^{\|\cdot\|_H} = D(S)^{\perp\perp} = H,$$

d.h. $D(S) \subseteq H$ ist dicht. □

Nützliche weitere Eigenschaften erhalten wir, wenn wir die Form a als hermitesch, d.h.

$$a(u, v) = \overline{a(v, u)} \text{ für alle } u, v \in V,$$

voraussetzen.

Satz (Zusatz zu Lax-Milgram): Ist a zusätzlich hermitesch auf $V \times V$, so ist S abgeschlossen, selbst-adjungiert und sein Definitionsbereich $D(S) \subseteq V$ ist dicht (in V).

Beweis:
S **ist symmetrisch**: Es gilt wegen der hermit-Eigenschaft:

$$\langle Su, v \rangle_H = a(u, v) = \overline{a(v, u)} = \overline{\langle Sv, u \rangle_H} = \langle u, Sv \rangle_H \text{ für alle } u, v \in D(S).$$

Damit ist

$$D(S) \subseteq D(S^*) \subseteq H.$$

S **ist selbst-adjungiert**: Wir zeigen dazu, dass $D(S^*) \subseteq D(S)$ ist. Sei $v \in D(S^*)$, so ist $S^*v \in H$. Da der Operator S insbesondere surjektiv ist, finden wir ein Element $v_0 \in D(S)$ mit

$$Sv_0 = S^*v.$$

Weiter haben wir nach der Symmetrie von S für alle $u \in D(S)$:

$$\langle Su, v_0 \rangle_H = \langle u, Sv_0 \rangle_H = \langle u, S^*v \rangle_H = \langle Su, v \rangle_H .$$

Erneut finden wir mit der Surjektivität von S ein Element $u_0 \in D(S)$ mit

$$Su_0 = v_0 - v \in H.$$

Also erhalten wir nun für $u = u_0$

$$0 = \langle Su_0, v_0 - v \rangle_H = \langle v_0 - v, v_0 - v \rangle_H = \|v - v_0\|_H^2 \geq 0,$$

d.h. $v = v_0 \in D(S)$. Also ist

$$D(S^*) \subseteq D(S) \subseteq D(S^*),$$

d.h. $D(S^*) = D(S)$. Mit der Symmetrie von S folgt nun die Selbst-Adjungiertheit von S, also $S = S^*$.
S **abgeschlossen**: Da das Adjungierte stets abgeschlossen ist, ist auch $S = S^*$ abgeschlossen.
$D(S)$ **dicht in** V: Sei $h \in V$ mit

$$\langle u, h \rangle_V = 0 \text{ für alle } u \in D(S).$$

Da $A\colon V \to V$ ein Isomorphismus ist, finden wir ein $v \in V \subseteq H$ mit $Av = h$. Nun haben wir, da die Form a hermitesch ist:

$$0 = \langle u, h \rangle_V = \langle u, Av \rangle_V = \overline{\langle Av, u \rangle_V} = \overline{a(v, u)} = a(u, v) = \langle Su, v \rangle_H$$

für alle $u \in D(S)$. Wegen der Surjektivität von S finden wir nun ein Element $u_0 \in D(S)$ mit $Su_0 = v \in H$. Also gilt für $u = u_0$:

$$0 = \langle u_0, h \rangle_V = \langle Su_0, v \rangle_H = \langle v, v \rangle_H = \|v\|_H^2 \geq 0,$$

d.h. $v = 0$ und damit auch wegen Linearität von A:

$$h = Av = 0.$$

Also ist $D(S)^\perp = \{0\}$ in V und daraus folgt:

$$\overline{D(S)}^{\|\cdot\|_V} = D(S)^{\perp\perp} = V,$$

d.h. $D(S)$ ist dicht in V. $\square$