12.07.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Spektraltheorie

Halbseitige Ableitungen

Definition (Rechtsseitige Ableitung): Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in \mathring{J}$ ein innerer Punkt und $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass die Funktion f im Punkt x_0 eine rechtsseitige Ableitung besitzt, falls der Limes

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert. In diesem Fall schreiben wir:

$$D^+ f(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ist $I \subseteq J$ ein Teilintervall, dann sagen wir ganz analog, dass f auf I rechtsseitig differenzierbar ist, falls die Funktion f in jedem Punkt $x \in I$ rechtsseitig differenzierbar ist.

Satz: (Monotoniesatz I) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auf (a,b) rechtsseitig differenzierbar ist mit rechtsseitiger Ableitung $D^+f(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist die Funktion f streng monoton wachsend.

Beweis:
Annahme: Es gebe $c, d \in [a,b]$ mit $c < d$ und $f(c) > f(d)$.
Nach dem Zwischenwertsatz (da f stetig ist) existiert für alle $\alpha \in (f(d), f(c))$ ein Element $x_\alpha \in (c,d)$ mit $f(x_\alpha) = \alpha$. Setze nun

$$\alpha_0 := \max_{x \in [c,d]} f(x).$$

Wähle nun das maximale $x_0 \in [c,d]$ mit $f(x_0) = \alpha_0$, d.h.

$$f(x) < \alpha_0 \text{ für alle } x \in (x_0, d).$$

Dieses existiert, denn sonst gebe es eine streng monoton wachsende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [c,d)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = d$ und $f(x_n) = \alpha_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt nun:

$$f(d) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \alpha_0 = \alpha_0 \geq f(c) > f(d),$$

was ein Widerspruch ist. Also erhalten wir nun:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0 \text{ für alle } h \in (0, d - x_0).$$

Dies liefert:

$$0 < D^+ f(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0,$$

was ein Widerspruch darstellt. Damit war unsere Annahme falsch und es muss $f(c) \leq f(d)$ gelten, somit ist die Funktion f monoton wachsend. Wäre nun $f(c) = f(d)$, so wäre die Funktion f wegen der Monotonie konstant auf $[c,d]$, also auch differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (c,d)$. Dies widerspricht:

$$0 < D^+ f(x) = f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in (c,d).$$

Also muss $f(c) < f(d)$ sein. Und somit ist die Funktion f streng monoton wachsend. □

Folgerung (Monotoniesatz II) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auf (a,b) rechtsseitig differenzierbar ist mit rechtsseitiger Ableitung $D^+f(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist die Funktion f streng monoton fallend.

Beweis: Setze $\widetilde{f} := -f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) rechtsseitig differenzierbar mit rechtsseitiger Ableitung

$$D^+ \widetilde{f}(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-f(x+h) - (-f(x))}{h} = -\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= -D^+ f(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a,b).$$

Also ist nach dem obigen Monotoniesatz die Funktion $\widetilde{f}$ streng monoton wachsend. Dadurch ist die Funktion $-\widetilde{f} = -(-f) = f$ aber streng monoton fallend. □

Satz (Allgemeiner Mittelwertsatz (Scheffer 1885)): Seien $J, I \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle, $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige, rechtsseitig differenzierbare Funktion mit rechtsseitiger Ableitung $D^+ f(x) \in I$ für alle $x \in J$. Dann gilt für den Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in I \text{ für alle } x, y \in J \text{ mit } x \neq y.$$

Beweis: O.B.d.A.: Es existieren $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ mit $I \subseteq (a,b)$, d.h.

$$a < D^+ f(x) < b \text{ für alle } x \in J.$$

Setze $g(x) := f(x) - ax$ und $h(x) := f(x) - bx$ für $x \in J$. Dann sind g und h stetig und rechtsseitig differenzierbar mit rechtsseitiger Ableitung:

$$\begin{aligned}
D^+ g(x) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(f(x+h) - a(x+h)) - (f(x) - ax)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a = D^+ f(x) - a > 0, \\
D^+ h(x) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h(x+h)-h(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(f(x+h) - b(x+h)) - (f(x) - bx)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x) - bh}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - b = D^+ f(x) - b < 0
\end{aligned}$$

für alle $x \in J$, d.h. g ist eine streng monoton wachsende Funktion nach dem Monotoniesatz I und die Funktion h ist streng monoton fallend nach dem Monotoniesatz II. Seien nun $x, y \in J$ mit $x \neq y$ fest.
Fall 1. $x < y$:
Dann gilt für den Differenzenquotienten auf Grund der Monotonie von g:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{(f(x)-ax) - (f(y)-ay) + ax - ay}{x-y} = \frac{g(x)-g(y)+a(x-y)}{x-y} = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} + a \\
&> 0 + a = a,
\end{aligned}$$

da $x - y < 0$ und $g(x) - g(y) < 0$ ist.
Fall 2. $x > y$:
Dann gilt für den Differenzenquotienten auf Grund der Monotonie von h:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{(f(x)-bx) - (f(y)-by) + bx - by}{x-y} = \frac{h(x)-h(y)+b(x-y)}{x-y} = \frac{h(x)-h(y)}{x-y} + b \\
&< 0 + b = a,
\end{aligned}$$

da $x - y > 0$ und $h(x) - h(y) > 0$ ist.
Damit folgt nun

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in (a,b).$$

Für $a \to \min I^-$ und $b \to \max I^+$ folgt nun auch

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in I.$$

Dies war zu zeigen. □

Satz (Fall: Halbseitige Ableitung stetig) Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige, rechtsseitig differenzierbare Funktion mit stetiger rechtsseitiger Ableitung $D^+ f\colon J \to \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion f stetig differenzierbar auf J mit Ableitung $f' = D^+ f$.

Beweis: Seien $x_0 \in J$, $\varepsilon > 0$ und setze $a := D^+ f(x_0) \in \mathbb{R}$. Wegen der Stetigkeit der rechtsseitigen Ableitung $D^+ f$ existiert ein $\delta := \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ mit

$$D^+(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) =: I_\varepsilon \subseteq \mathbb{R} \text{ für alle } x \in J \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt nun:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in I_\varepsilon \text{ für alle } x \in J \text{ mit } 0<|x-x_0|<\delta.$$

Dies bedeutet, dass für alle $x \in J$ mit $0<|x-x_0|<\delta$ wir

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-D^+f(x_0)\right| = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right| < \varepsilon.$$

Also folgt für den Limes:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = D^+f(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Damit ist die Funktion f stetig und differenzierbar auf J mit $f' = D^+f$ und da die rechtsseitige Ableitung stetig ist, ist auch f' stetig. Also ist $f \in C^1(J)$ mit $f' = D^+f$. □

Bemerkung: Wir benötigen in der verallgemeinerten Version des Mittelwertsatzes nicht zwingend die rechtsseitige Ableitung, es lässt sich noch auf sogenannte Dini-Derivierte, das wären stets die rechts-/ linksseitigen limes superior und limes inferior des Differenzenquotienten, ebenso verhält es sich mit dem darauffolgenden Satz.