18.04.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

I. Wiederholung zu kompakten Operatoren

In diesem Abschnitt möchte ich einige Dinge zu kompakten Operatoren aus dem Funktionalanalysiskurs WS 2017/18 am KIT wiederholen und gegebenfalls die Notation anpassen. Für die meisten Beweise siehe das jeweilige Skript bzw. Vorlesungsmitschieb. Seien hier durchweg $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei $\mathbb{K}$-Banachräume mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Mit $L(X,Y)$ bezeichnen wir den Raum aller linearen und stetigen Operatoren $T\colon X \to Y$, sowie mit $L(X) := L(X,X)$.

Definition I.1.: (Kompakte Operatoren) Einen linearen Operator $T\colon X \to Y$ nennen wir kompakt, falls $T(B_1(0))$ relativ kompakt ist in Y, d.h.

$$\overline{T(B_1(0))}^{\|\cdot\|_Y} \subseteq Y \text{ ist kompakt.}$$

Den Raum aller linearen und kompakten Operatoren zwischen X und Y bezeichnen wir mit $K(X,Y)$. Im Fall $X = Y$ schreiben wir $K(X)$ statt $K(X,X)$.

Kompakte Operatoren haben einige besondere Eigenschaften, die sie so hervorheben. Hier ein kurzer Überblick über einen Teil davon:

Eigenschaften kompakter Operatoren I.2.: Sei $T\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Wir haben

(i) [Äquivalente Charakterisierung] Der Operator T ist kompakt genau dann, wenn für alle beschränkten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es eine Teilfolge $\left(x_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein Element $y \in Y$ gibt so, dass

$$\lim_{j\to\infty} T x_{n_j} = y \text{ in } Y \text{ ist.}$$

(ii) Seien $(Z, \|\cdot\|_Z)$ ein weiterer $\mathbb{K}$-Banachraum, T stetig und $S\colon Y \to Z$ ein weiterer linearer stetiger Operator. So folgt, falls zusätzlich T oder S kompakt ist, dass auch $ST\colon X \to Z$ kompakt ist.

(iii) [Topologie] Es ist

$$K(X,Y) \subseteq L(X,Y) \text{ abgeschlossen } \Big(\text{bzgl. } \|\cdot\|_{L(X,Y)} - \text{Norm}\Big),$$

d.h. $\Big(K(X,Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)}\Big)$ ist ein Banachraum.

(iv) [Approximationseigenschaft] Sind $T, (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ mit $\operatorname{range}(T_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{L(X,Y)} = 0,$$

so ist T kompakt.

In vielen Räumen existiert auch die Rückrichtung von (iv) wie z.B. in allen Hilberträumen. In diesen Räumen können wir kompakte Operatoren als Grenzwerte von endlich-dimensionalen Operatoren auffassen.

Einer der wichtigsten Sätze in Verbindung mit kompakten Operatoren ist der Spektralsatz:

Spektralsatz für kompakte und selbst-adjungierte Operatoren I.3.: Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum mit $\dim(H) = \infty$, sowie $T \in K(H)$ selbst-adjungiert. Dann existiert ein Orthonormalsystem (ONS) $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ von Eigenvektoren mit zugehörigen Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$ in $\mathbb{K}\backslash\{0\}$ so, dass

$$\begin{aligned} H &= \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{lin}\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}}^{\|\cdot\|_H}, \\ \lim_{j\to\infty} \lambda_j &= 0, \\ Tx &= \sum_j \lambda_j \langle x, e_j\rangle_H \, e_j \text{ für alle } x \in H, \end{aligned}$$

$$\|T\|_{L(H)} = \sup_j |\lambda_j| < \infty.$$

Eventuell ist das ONS bzw. die Eigenwertfolge endlich/ bricht ab, dann ist die Summe oben auch endlich.

II. Banachraum-wertige analytische Funktionen

In diesem Abschnitt möchten wir Banachraum-wertige Funktionen betrachten und einige Resultate aus der Integrationstheorie, sowie der Funktionentheorie darauf übertragen. Wir werden nicht das allgemeinste hier betrachten, aber allgemein genug um die Konzepte verstehen zu können. Hierzu seien stets $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei $\mathbb{C}$-Banachräume.

Definition II.1.: (Integral) Sei $r\colon [a,b] \to X$ eine stetige Funktion. Wir definieren das eigentliche Integral

$$\int_a^b r(s)\mathrm{d}s := \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=0}^n r\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}\right] \text{ in } X.$$

Analog definieren wir das uneigentliche Integral

$$\int_\alpha^\beta r(s)\mathrm{d}s := \lim_{a\to\alpha^+} \int_a^c r(s)\mathrm{d}s + \lim_{b\to\beta^-} \int_c^b r(s)\mathrm{d}s \text{ für ein festes } c \in (\alpha, \beta).$$

Wir haben dafür dieselben Rechenregeln (Linearität, Dreiecks-Ungleichung, etc.) wie für das bekannte Riemann-Integral aus Analysis I/ II.

Ein nützliches und kurzes Resultat über die Vertauschbarkeit von Integral und Operator:

Satz II.2.: (Satz von Hille) Sei $A\colon D(A) \subseteq X \to Y$ ein abgeschlossener Operator. Ist $r\colon [a,b] \to X$ stetig mit $r(t) \in D(A)$ für alle $t \in [a,b]$ und ist die Abbildung $t \mapsto Ar(t)$ stetig auf $[a,b]$, dann gilt:

$$\int_a^b r(t)\mathrm{d}t \in D(A) \text{ mit } A\left(\int_a^b r(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b Ar(t)\mathrm{d}t.$$

Beweis: Setze zu jedem $N \in \mathbb{N}$ die Zerlegungspunkte

$$t_j^{(N)} := a + j\frac{b-a}{N} \text{ für } j = 0, \ldots, N.$$

Definiere zu jedem $N \in \mathbb{N}$:

$$x_N := \sum_{j=0}^N r\left(t_j^{(N)}\right)\frac{b-a}{N} \in D(A).$$

Dann gilt:

$$\lim_{N\to\infty} x_N = \int_a^b r(t)\mathrm{d}t \text{ in } X.$$

Weiter gilt für jdes $N \in \mathbb{N}$:

$$Ax_N = \sum_{j=0}^N Ar\left(t_j^{(N)}\right)\frac{b-a}{N}.$$

Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto Ar(t)$ auf $[a,b]$ folgt:

$$\lim_{N\to\infty} Ax_N = \int_a^b Ar(t)\mathrm{d}t \text{ in } Y.$$

Da der Operator A abgeschlossen ist, folgt per Definition:

$$\int_a^b r(t)\mathrm{d}t \in D(A) \text{ und } A\left(\int_a^b r(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b Ar(t)\mathrm{d}t.$$

□

Folgerung II.3.: (Kleine Version vom Satz von Hille) Ist $r\colon [a,b] \to X$ eine stetige Funktion und $T \in L(X,Y)$ ein beschränkter Operator, dann gilt:

$$T\left(\int_a^b r(s)\mathrm{d}s\right) = \int_a^b T(r(s))\mathrm{d}s \in Y.$$

Beweis: Da beschränkte Operatoren insbesondere abgeschlossen sind und die Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen wieder stetig ist, folgt dies unmittelbar aus dem Satz von Hille. □

Bemerkung: Dies gilt insbesondere im Falle $Y = \mathbb{C}$ und $T = x' \in X'$.

Definition II.4.: (Komplex differenzierbar, Kurvenintegral) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $r \colon \Omega \to X$ eine Funktion.

(i) Schwach komplex Differenzierbar: r heißt schwach analytisch, falls für alle stetigen Funktionale $x' \in X'$ die Abbildung $x' \circ r \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

(ii) Komplex Differenzierbar: r heißt analytisch in Ω, falls für alle $\lambda_0 \in \Omega$ der Grenzwert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} r(\lambda_0) := r'(\lambda_0) := \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{-1} [r(\lambda) - r(\lambda_0)] \text{ in } X \text{ existiert.}$$

(iii) Kurvenintegral: Sei $\Gamma = \{\gamma(t) \colon t \in [a,b]\}$ eine endlich-stückweise glatte Kurve in Ω, r eine stetige Funktion, dann ist das Kurvenintegral definiert durch

$$\int_\Gamma r(\lambda)\mathrm{d}\lambda := \int_a^b r(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t \in X.$$

Satz II.5.: (Cauchy Integralsatz und Cauchy Integralformel) Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex, sowie $r \colon \Omega \to X$ schwach analytisch.

(1) Ist $\gamma \subseteq \Omega$ eine stückweise glatte und geschlossene Kurve, dann gilt:

$$\int_\Gamma r(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 0.$$

(ii) Für alle Punkte $\lambda_0 \in \Omega$ und Radien $a > 0$ mit $\overline{B_a(\lambda_0)} \subseteq \Omega$ gilt:

$$r(\lambda) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \frac{1}{\mu - \lambda} r(\mu)\mathrm{d}\mu \in X.$$

Beweis: Sei $x' \in X'$ ein stetiges Funktional, also ist die Funktion $\lambda \mapsto x'(r(\lambda))$ analytisch. Nach dem Cauchy Integralsatz und der Cauchy Integralformel aus der Funktionentheorie, sowie der obigen Folgerung gilt:

$$0 = \int_\Gamma x'(r(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda = x'\left(\int_\Gamma r(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)$$

$$x'(r(\lambda)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \frac{1}{\mu - \lambda} x'(r(\mu))\,\mathrm{d}\mu = x'\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \frac{1}{\mu - \lambda} r(\mu)\mathrm{d}\mu\right)$$

$$\Leftrightarrow\ x'\left(r(\lambda) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \frac{1}{\mu - \lambda} r(\mu)\mathrm{d}\mu\right) = 0.$$

Mit $x_1 := \int_\Gamma r(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, $x_2 := r(\lambda) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \frac{1}{\mu - \lambda} r(\mu)\mathrm{d}\mu$ folgt:

$$x'(x_1) = 0,\ x'(x_2) = 0 \text{ für alle } x' \in X',$$

also ergibt sich aus dem Hahn-Banach Theorem:

$$\int_\Gamma r(\lambda)\mathrm{d}\lambda = x_1 = 0 \text{ und } r(\lambda) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \frac{1}{\mu - \lambda} r(\mu)\mathrm{d}\mu.$$

□

Nun können wir einen wichtigen Fakt beweisen, der besagt, dass schwach analytisch und analytisch gleichbedeutend ist.

Lemma II.6.: (Dunford Lemma) Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex, sowie $f \colon \Omega \to X$ eine Banachraum-wertige Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) Die Funktion f ist schwach analytisch.

(ii) Die Funktion f ist analytisch.

Beweis: " $\Leftarrow$ ": Seien die Funktion f analytisch, $\lambda_0 \in \Omega$ ein beliebiger Punkt und $x' \in X'$ ein beliebiges stetiges Funktional. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(x' \circ f)}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0) &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x'(f(\lambda)) - x'(f(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} x' \left(\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right) \\ &= x' \left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right) \\ &= (x' \circ f')(\lambda_0),\end{aligned}$$

d.h. f ist schwach analytisch auf Ω, da λ_0 und x' beliebig waren.
" $\Rightarrow$ ": Sei nun die Funktion f schwach analytisch, dann gilt nach Satz II.5 (ii) die Cauchy-Integralformel. Sei $\lambda_0 \in \Omega$ ein beliebiger Punkt und wähle dazu einen passenden Radius $a > 0$ mit $\overline{B_a(\lambda_0)} \subseteq \Omega$. Es gilt für alle $\lambda \in B_a(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}$:

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_0)^{-1}(f(\lambda) - f(\lambda_0)) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} (\mu - \lambda)^{-1} (\mu - \lambda_0)^{-1} (f(\mu) - f(\lambda_0))\, \mathrm{d}\mu \\ &= frac12\pi \mathrm{i} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} (\mu - \lambda)^{-1} (\mu - \lambda_0)^{-1} f(\mu) \mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

denn es ist:

$$\int_\gamma \frac{1}{(\mu - \lambda)(\mu - \lambda_0)} \mathrm{d}\mu = 2\pi \mathrm{i} \left[\frac{1}{\lambda_0 - \lambda} + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \right] = 0.$$

Für $\lambda \in B_{\frac{a}{2}}(\lambda_0)$ und $\mu \in \partial B_a(\lambda_0)$ gilt:

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu - \lambda_0} \right| &= \left| \frac{(\mu - \lambda_0) - (\mu - \lambda)}{(\mu - \lambda)(\mu - \lambda_0)} \right| \\ &= \frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\mu - \lambda| \cdot |\mu - \lambda_0|} \\ &\leq \frac{2}{a \cdot a} |\lambda - \lambda_0| \\ &= \frac{2}{a^2} |\lambda - \lambda_0|.\end{aligned}$$

Also erhalten wir für alle $\lambda \in B_{\frac{a}{2}}(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}$:

$$\begin{aligned}&\left\| (\lambda - \lambda_0)^{-1}(f(\lambda) - f(\lambda_0)) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} (\mu - \lambda_0)^{-2} f(\mu) \mathrm{d}\mu \right\|_X \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} (\mu - \lambda)^{-1} (\mu - \lambda_0)^{-1} f(\mu) \mathrm{d}\mu - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} (\mu - \lambda_0)^{-2} f(\mu) \mathrm{d}\mu \right\|_X \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \left[(\mu - \lambda)^{-1} - (\mu - \lambda_0)^{-1} \right] (\mu - \lambda_0)^{-1} f(\mu) \mathrm{d}\mu \right\|_X \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \left| (\mu - \lambda)^{-1} - (\mu - \lambda_0)^{-1} \right| |\mu - \lambda_0|^{-1} \|f(\mu)\|_X \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq a \cdot \frac{2}{a^2} \cdot \frac{1}{a} |\lambda - \lambda_0| \sup_{\mu \in \partial B_a(\lambda_0)} \|f(\mu)\|_X \\ &= \frac{2}{a^2} |\lambda - \lambda_0| \sup_{\mu \in \partial B_a(\lambda_0)} \|f(\mu)\|_X \\ &\to 0\end{aligned}$$

für $\lambda \to \lambda_0$, d.h. dass die Funktion f analytisch ist in λ_0 mit der Ableitung

$$f'(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} (\mu - \lambda_0)^{-2} f(\mu) \mathrm{d}\mu.$$

Also ist die Funktion f analytisch auf ganz Ω, da λ_0 beliebig war. $\square$

III. Schwach differenzierbare Funktionen

In diesem Abschnitt möchten wir die schwache Differenzierbarkeit von L^p-Funktionen wiederholen. Hierzu seien stets $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex und $1 \leq p, q < \infty$ zwei Potenzen.

Definition III.1.: (Schwache Differenzierbarkeit) Eine Funktion $u \in L^p(\Omega)$ hat eine ($\alpha-$)schwache Ableitung $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ in $L^q(\Omega)$, falls es eine Funktion $v \in L^q(\Omega)$ gibt mit

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x) \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.
In Zeichen: $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} := v$ schwache Ableitung von u.

Die Wohldefiniertheit/ Eindeutigkeit der schwachen Ableitung erhalten wir aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung.

Satz III.2.: (Fundamentallemma der Variationsrechnung) Sei $u \in L^p(\Omega)$ eine Funktion. Falls für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$$

gilt, so folgt $u = 0$ fast überall auf Ω.

Folgerung III.3.: (Eindeutigkeit der schwachen Ableitung) Sei $u \in L^p(\Omega)$ eine Funktion mit einer schwachen Ableitung in $L^q(\Omega)$, dann ist diese schwache Ableitung eindeutig.

Beweis: Seien $v_1, v_2 \in L^q(\Omega)$ zwei schwache Ableitungen von u. Dann gilt per Definition für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega v_1(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x) &= \int_\Omega v_2(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ 0 = \int_\Omega v_1(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega v_2(x)\varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(v_1(x) - v_2(x)\right)\varphi(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Damit folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, dass

$$v_1 - v_2 = 0 \text{ fast überall auf } \Omega \text{ bzw. } v_1 = v_2 \text{ fast überall auf } \Omega \text{ ist.}$$

$\square$