18.04.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Gegenbeispiele)

Finden Sie Gegenbeispiele zum Satz vom abgeschlossenen Graphen, falls wir

(i) nur $(Y, \|\cdot\|_Y)$ als einen Banachraum voraussetzen, d.h. $(X, \|\cdot\|_X)$ ist nur ein normierter (unvollständiger) Vektorraum.

(ii) nur $(X, \|\cdot\|_X)$ als einen Banachraum voraussetzen, d.h. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ist nur ein normierter (unvollständiger) Vektorraum.

Aufgabe 2 (Satz von der stetigen Inversen)

Beweisen Sie den "*Satz von der stetigen Inversen*" und begründen Sie den Namen:
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume, $T\colon X \to Y$ und $J\colon Y \to Z$ lineare Operatoren. Weiter seien J injektiv und stetig, sowie $JT\colon X \to Z$ stetig. Dann ist auch T stetig.

Aufgabe 3 ()

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$, $(X_2, \|\cdot\|_{X_2})$, $(Y_1, \|\cdot\|_{Y_1})$, $(Y_2, \|\cdot\|_{Y_2})$ Banachräume mit $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$ abgeschlossene Untervektorräume, $\|x\|_{X_1} \leq c\,\|x\|_X$ für alle $x \in X_1$ für ein $c > 0$ und $T_i\colon X_i \to Y_i$ lineare Operatoren mit abgeschlossenem Graphen in $X \times Y_i$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\|T_2 x\|_{Y_2} \leq C \left(\|T_1 x\|_{Y_1} + \|x\|_{X_1} \right) \text{ für alle } x \in X_1.$$

Aufgabe 4 (Schwache Ableitungen)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex und $1 \leq p, q < \infty$. Zeigen Sie, dass der schwache Ableitungsoperator

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\colon D\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) := \left\{ u \in L^p(\Omega)\colon \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \in L^q(\Omega) \right\} \subseteq L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

ein linearer, dicht definierter und abgeschlossener Operator ist.