18.04.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

1. Übungsblatt - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Gegenbeispiele)

Finden Sie Gegenbeispiele zum Satz vom abgeschlossenen Graphen, falls wir

(i) nur $(Y, \|\cdot\|_Y)$ als einen Banachraum voraussetzen, d.h. $(X, \|\cdot\|_X)$ ist nur ein normierter (unvollständiger) Vektorraum.

(ii) nur $(X, \|\cdot\|_X)$ als einen Banachraum voraussetzen, d.h. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ist nur ein normierter (unvollständiger) Vektorraum.

Lösung von Aufgabe 1

(i) Setze
$$(X, \|\cdot\|_X) := \left(C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^0[0,1]}\right), \ (Y, \|\cdot\|_Y) := \left(C^0[0,1], \|\cdot\|_{C^0[0,1]}\right).$$
Definiere den linearen Operator $T_1 \colon X \to Y f \mapsto f'$.
T_1 **ist abgeschlossen:** Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $f \in X$ und $g \in Y$ mit
$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ in } X$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n' = \lim_{n\to\infty} T_1 f_n = g \text{ in } Y.$$
Laut Analysis I/II ist $f \in C^1[0,1]$ mit $T_1 f = f' = g$, d.h. T_1 ist abgeschlossen.
T_1 **ist unstetig:** Wähle Monom $p_n(x) = x^n \in C^1[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, mit der Ableitung $p_n'(x) = nx^{n-1}$ auf $[0,1]$. Damit gilt:
$$\|T_1 p_n\|_Y = n \to \infty \text{ für } n \to \infty,$$
aber $\|p_n\|_X = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

(ii) Wähle nach Lineare Algebra I/II eine (algebraische Basis) $B := (b_j)_{j\in I} \subseteq l^2(\mathbb{N})$ vom Vektorraum $l^2(\mathbb{N})$, wobei I überabzählbar ist, mit $\|b_j\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1$ für alle $j \in I$, d.h. zu jedem Element $x \in l^2(\mathbb{N})\backslash\{0\}$ gibt es eine endliche Indexmenge $I' \subseteq I$ und Koeffizienten $(\alpha_j)_{j\in I'} \subseteq \mathbb{K}\backslash\{0\}$ mit
$$x = \sum_{j\in I'} \alpha_j b_j.$$
Setze die Norm
$$\|x\|_B := \sum_{j\in I'} |\alpha_j|.$$
Setze
$$(X, \|\cdot\|_X) := \left(l^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{l^2(\mathbb{N})}\right), \ (Y, \|\cdot\|_Y) := \left(l^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_B\right).$$
Definiere den linearen Operator $T_2 \colon X \to Y$, $x \mapsto x$.
T_2 **ist abgeschlossen:** Es gilt:
$$\begin{aligned}\|x\|_X &= \left\|\sum_{j\in I'} \alpha_j b_j\right\|_X \le \sum_{j\in I'} |\alpha_j| \, \|b_j\|_X \\ &= \sum_{j\in I'} |\alpha_j| = \|x\|_Y = \|Tx\|_Y\end{aligned}$$

für alle $x \in l^2(\mathbb{N})$. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ und $x, y \in l^2(\mathbb{N})$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } X,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T_2 x_n = y \text{ in } Y.$$

Dann gilt nach obiger Abschätzung

$$\begin{aligned}\|x-y\|_X &\leq \|x-x_n\|_X + \|x_n - y\|_X \\ &\leq \|x-x_n\|_X + \|T_2(x_n-y)\|_Y \\ &= \|x-x_n\|_X + \|T_2 x_n - T_2 y\|_Y \\ &= \|x-x_n\|_X + \|T_2 x_n - y\|_Y \to 0+0=0,\end{aligned}$$

für $n\to\infty$, d.h. $x=y$ in $l^2(\mathbb{N})$ und $T_2 x = x = y$, d.h. T_2 ist abgeschlossen.
T_2 **ist unstetig:** Der Operator T_2 ist bijektiv mit

$$T_2^{-1}\colon Y \to X,\ y \mapsto y.$$

Der Operator T_2^{-1} ist stetig, denn es gilt für alle $y \in Y$:

$$\left\|T_2^{-1}y\right\|_X \leq \left\|T_2 T_2^{-1} y\right\|_Y = \|y\|_Y\,.$$

Zu zeigen bleibt, dass Y kein Banachraum (nicht vollständig) ist, da sonst nach Aufgabe A2 Satz von der stetigen Inversen folgt, dass X isomorph ist zu Y, damit wäre Y vollständig.
Y **ist nicht vollständig:** Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B$. Setze die Folge

$$x^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} b_k \in l^2(\mathbb{N}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} b_k$$

mit Koeffizienten

$$\alpha_k^{(n)} := \begin{cases} \frac{1}{k^2} \text{ falls} k \leq n \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt

$$\begin{aligned}\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_Y &= \left\|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} b_k\right\|_Y \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \to 0\end{aligned}$$

für $n, m \to \infty$, da die Reihe (absolut) konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$, d.h. die Folge $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ ist eine Cauchy-Folge in Y.
Annahme: Y ist vollständig.
Dann existiert ein $x \in Y$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_Y = 0.$$

Da $x \in Y$ ist, existieren $N \in \mathbb{N}$, $\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_N \in B$ und Koeffizienten $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_N \in \mathbb{K}$ mit

$$x = \sum_{k=1}^{N} \widetilde{\alpha}_k \widetilde{b}_k.$$

O.B.d.A.: $\widetilde{\alpha}_k \neq 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, N\}$, d.h. $x \neq 0$.
Denn wäre $x = 0$ so würde folgen:

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_Y = \lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)}\right\|_Y \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6},\end{aligned}$$

dies wäre ein Widerspruch, also ist $x \neq 0$.
Fall 1.: Es existiert ein $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ mit $\widetilde{b}_{j_0} \neq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Setze

$$J := \left\{ j \in \{1, \dots, N\} \colon \widetilde{b}_j = b_k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dann definiere Koeffizienten

$$\beta_k := \begin{cases} \widetilde{\alpha}_j \text{ für } j \in J \text{ mit } \widetilde{b}_j = b_k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} .$$

Dann würde gelten:

$$\begin{aligned} \left\| x^{(n)} - x \right\|_Y &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_k^{(n)} - \beta_k \right| + \sum_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus J} |\widetilde{\alpha}_j| \\ &\geq |\widetilde{\alpha}_{j_0}| > 0 \end{aligned}$$

dies ist aber ein Widerspruch zu $0 < \lim\limits_{n \to \infty} \left\| x^{(n)} - x \right\|_Y = 0$, d.h. Fall 1. kann nicht auftreten.
Fall 2.: Für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\widetilde{b}_j = b_k$.
Ist $b_k \in \left\{ \widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_N \right\}$ setze $\alpha_k := \widetilde{\alpha}_k$, sonst $\alpha_k := 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k.$$

(Beachte, dass dies eine endliche Summe ist!) Weiter gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left| \alpha_k - \alpha_k^{(n)} \right| &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \left| \alpha_l - \alpha_l^{(n)} \right| \\ &= \left\| x - x^{(n)} \right\|_Y \to 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Damit ist für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_k = \lim_{n \to \infty} \alpha_k^{(n)} = \frac{1}{k^2},$$

was ein Widerspruch zu $\alpha_k = 0 \neq \frac{1}{k^2}$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele. D.h. Der Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ist nicht vollständig und damit ist es kein Banachraum. □

Aufgabe 2 (Satz von der stetigen Inversen)

Beweisen Sie den "*Satz von der stetigen Inversen*" und begründen Sie den Namen:
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume, $T \colon X \to Y$ und $J \colon Y \to Z$ lineare Operatoren. Weiter seien J injektiv und stetig, sowie $JT \colon X \to Z$ stetig. Dann ist auch T stetig.

Lösung von Aufgabe 2

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$ und $y \in Y$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ in X und $\lim\limits_{n \to \infty} Tx_n = y$ in Y. Dann folgt aus der Stetigkeit von JT bzw. J:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} JTx_n &= JTx \in \operatorname{range}(J) \text{ in } Z \\ \lim_{n \to \infty} JTx_n &= Jy \in \operatorname{range}(J) \text{ in } Z. \end{aligned}$$

Aus der Injektivität von J folgt: $Tx = y$, d.h. $T \colon X \to Y$ ist abgeschlossen. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen erhalten wir die Stetigkeit von T. □
Als Folgerung erhalten wir den *Satz von der stetigen Inversen*:
Folgerung: (Satz von der stetigen Inversen)
Seien X, Y zwei Banachräume und $A \colon X \to Y$ eine lineare, stetige Bijektion. Dann ist auch die Inverse $A^{-1} \colon Y \to X$ stetig.

Beweis: Setze $J := A$ und $T = A^{-1}$, sowie $Z = X$. Dann ist $JT = \mathrm{Id}_X$, also trivialerweise stetig. Laut der Aufgabe A2 gilt nun, dass $A^{-1} = T$ stetig ist. □

Aufgabe 3 ()

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $\left(X_1, \|\cdot\|_{X_1}\right)$, $\left(X_2, \|\cdot\|_{X_2}\right)$, $\left(Y_1, \|\cdot\|_{Y_1}\right)$, $\left(Y_2, \|\cdot\|_{Y_2}\right)$ Banachräume mit $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$ abgeschlossene Untervektorräume, $\|x\|_{X_1} \leq c\,\|x\|_X$ für alle $x \in X_1$ für ein $c > 0$ und $T_i\colon X_i \to Y_i$ lineare Operatoren mit abgeschlossenem Graphen in $X \times Y_i$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\|T_2 x\|_{Y_2} \leq C\left(\|T_1 x\|_{Y_1} + \|x\|_{X_1}\right) \text{ für alle } x \in X_1.$$

Lösung von Aufgabe 3

Wir setzen die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} J_1\colon X_1 &\to \operatorname{graph}(T_1) \subseteq X \times Y_1, x \mapsto (x, T_1 x) \\ J_2\colon \operatorname{graph}(T_1) &\subseteq X \times Y_1 \to Y_2, (x, T_1 x) \mapsto T_2 x. \end{aligned}$$

Wir statten den Produktraum $X \times Y_i$ mit der Produkttopologie und der Norm

$$\|(x, y)\|_{X \times Y_i} = \|x\|_X + \|y\|_{Y_i}$$

für $i = 1, 2$. Der Operator J_1 ist bijektiv. Weiter ist dieser stetig, denn wähle die Projektion

$$\pi_1\colon \operatorname{graph}(T_1) \subseteq X \times Y_1 \to X_1,\ (x, T_1 x) \mapsto x_1.$$

Dann ist wegen der geforderten Abschätzung an die $\|\cdot\|_{X_1}$ die Abbildung π_1 stetig:

$$\|\pi_1((x, Tx))\|_{X_1} = \|x\|_{x_1} \leq c\,\|x\|_X \leq c\,\|(x, Tx)\|_{X \times Y_1} \text{ für alle } x \in X.$$

Weiter ist die Verkettung $\mathrm{Id}_{X_1} = \pi_1 J_1\colon X_1 \to X_1$ offensichtlich stetig. Damit ist nach Aufgabe A2 die Abbildung J_1 stetig (da $\left(\operatorname{graph}(T_1), \|\cdot\|_{X \times Y_1}\right)$ ein Banachraum ist). Wegen der Bijektivität von J_1 und der Folgerung "Satz von der stetigen Inversen" aus Aufgabe A2 wissen wir nun auch, dass $J_1^{-1}\colon \operatorname{graph}(T_1) \subseteq X \times Y_1 \to X_1$ stetig ist. Betrachten wir nun die Verkettung $J_2 J_1\colon X_1 \to Y_2, x \mapsto T_2 x$. Dies ist abgeschlossen, denn für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_1$, $x \in X_1$ und $y \in Y_2$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} x_n &= x \text{ in } X_1, \\ \lim_{n \to \infty} T_2 x_n &= y \text{ in } Y_2. \end{aligned}$$

Wissen wir aus der Stetigkeit von J_1, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \to \infty} \|J_1 x_n - J_1 x\|_{X \times Y_1} \\ &= \lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_X + \|T_1 x_n - T_1 x\|_{Y_1}, \\ \|z\|_X &\leq \|z\|_X + \|T_1 z\|_{Y_1} \\ &= \|J_1 z\|_{X \times Y_1} \\ &\leq \widetilde{C}\,\|z\|_{X_1} \end{aligned}$$

für alle $z \in X_1$ und für eine Konstante $\widetilde{C} > 0$, d.h. $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ in X. Da der Graph von T_2 abgeschlossen ist in $X \times Y_2$ folgt, dass $y = \lim_{n \to \infty} T_2 x_n = T_2 x$ in Y ist, d.h. $J_2 J_1$ ist abgeschlossen. Aus de Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt nun, dass $J_2 J_1$ stetig ist. Nun ist aber als Verkettung stetiger Funktionen auch die Abbildung J_2 stetig:

$$J_2 = (J_2 J_1)\, J_1^{-1},$$

d.h. für alle $x \in X_1$ gilt:

$$\begin{aligned} \|T_2 x\|_{Y_2} = \|J_2(x, T_1 x)\|_{Y_2} &\leq C\,\|(x, T_1 x)\|_{X \times Y_1} \\ &= C\left(\|T_1 x\|_{Y_1} + \|x\|_X\right) \\ &\leq C\left(\|T_1 x\|_{Y_1} + \widetilde{C}\,\|x\|_{X_1}\right) \\ &\leq C \max\left\{1, \widetilde{C}\right\}\left(\|T_1 x\|_{Y_1} + \|x\|_{X_1}\right) \end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$. $\square$

Aufgabe 4 (Schwache Ableitungen)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex und $1 \leq p, q < \infty$. Zeigen Sie, dass der schwache Ableitungsoperator

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \colon D\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) := \left\{u \in L^p(\Omega) \colon \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \in L^q(\Omega)\right\} \subseteq L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

ein linearer, dicht definierter und abgeschlossener Operator ist.

Lösung von Aufgabe 4

$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ **dicht definiert:** Es ist $C_c^\infty(\Omega) \subseteq D\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)$ und $C_c^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$, da $p \in [1, \infty)$ ist.
$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ **abgeschlossen:** Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)$, $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n &= u \text{ in } L^p(\Omega) \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\partial^\alpha u_n}{\partial x^\alpha} &= v \text{ in } L^q(\Omega). \end{aligned}$$

Dann gilt mit der Definition der schwachen Ableitung:

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(x) \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x) \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x) \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x) \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \frac{\partial^\alpha u_n}{\partial x^\alpha}(x) \varphi(x) \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x) \varphi(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, d.h. $u \in D\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)$ mit

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = v.$$

□