24.04.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Elementare Aussagen über Spektrum & Resolventenfunktion)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $S, T \in L(X)$ zwei Operatoren. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $J\colon Y \to X$ ein stetiger Isomorphismus und definieren wir den Operator $\widetilde{T} := J^{-1}TJ \in L(Y)$, dann gilt:

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) = \sigma(T).$$

(ii) Sind Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gegeben und definieren wir den Operator $B := \lambda \mathrm{Id}_X + \mu T \in L(X)$, so gilt:

$$\sigma(B) = \lambda + \mu\sigma(T) := \{\lambda + \mu \cdot z \colon z \in \sigma(T)\}.$$

(iii) Es gilt die allgemeine Resolventengleichung:

$$R(\lambda, S) - R(\lambda, T) = R(\lambda, S)\,(S - T)\,R(\lambda, T) \text{ für alle } \lambda \in \rho(S) \cap \rho(T).$$

(iv) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \delta \|T\|_{L(X)}$ für ein $\delta > 1$, so gilt:

$$\|\lambda R(\lambda, T)\|_{L(X)} < \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Aufgabe 2 (Multiplikationsoperatoren)

(1) Seien $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $X := C_b^0(\Omega, \mathbb{C}) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt auf } \Omega\}$, $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{C^0(\Omega)}$, $m \in X$. Definiere die Abbildung:

$$M_m\colon X \to X,\ f \mapsto m \cdot f.$$

Zeigen Sie, dass M_m wohl-definiert, $M_m \in L(X)$ mit $\|M_m\|_{L(X)} = \|m\|_X$ ist. Geben Sie das Spektrum $\sigma(M_m)$ und die Resolventenfunktion $R(\lambda, M_m)$ für $\lambda \in \rho(M_m)$ an.

(2) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $m\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine μ-messbare Funktion, sowie $1 \leq p \leq \infty$. Definiere die Abbildung:

$$M_m f := m \cdot f$$

für Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie zuerst, dass

$$M_m \in L\left(L^p(\Omega, \mu)\right) \Leftrightarrow m \in L^\infty(\Omega, \mu).$$

In diesem Falle ist $\|M_m\|_{L(L^p(\Omega,\mu))} = \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$. Geben Sie anschließend das Spektrum $\sigma(M_m)$ an.

(3) Sei $X := l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ mit $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{l^2(\mathbb{Z})}$. Definiere den Operator

$$T\colon X \to X,\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \left(\frac{1}{2}\left(u_{n-1} + u_{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Zeigen Sie, dass T wohl-definiert, $T \in L(X)$ ist und bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(T)$.
Hinweis: Nutzen Sie den isometrischen Isomorphismus $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \to L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ und Aufgabe 1(i) mit Aufgabe 2(2).

Aufgabe 3 (Kleines Spektrum)

Seien $X = C^0[0,1]$ mit $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{C^0[0,1]}$, $k \in C^0\left([0,1] \times [0,1]\right)$. Definiere den Operator $T \colon X \to X$ durch

$$(Tf)(t) := \int_0^t k(t,s) f(s) \mathrm{d}s \text{ für } f \in X,\ t \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass T wohl-definiert ist mit $\|T\|_{L(X)} \leq \sup\limits_{t \in [0,1]} \int_0^t |k(t,s)| \, \mathrm{d}s$ und das Spektrum

$$\sigma(T) = \{0\}$$

besitzt.