24.04.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

2. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Elementare Aussagen über Spektrum & Resolventenfunktion)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $S, T \in L(X)$ zwei Operatoren. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $J\colon Y \to X$ ein stetiger Isomorphismus und definieren wir den Operator $\widetilde{T} := J^{-1}TJ \in L(Y)$, dann gilt:

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) = \sigma(T).$$

(ii) Sind Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gegeben und definieren wir den Operator $B := \lambda \mathrm{Id}_X + \mu T \in L(X)$, so gilt:

$$\sigma(B) = \lambda + \mu\sigma(T) := \{\lambda + \mu \cdot z\colon z \in \sigma(T)\}.$$

(iii) Es gilt die allgemeine Resolventengleichung:

$$R(\lambda, S) - R(\lambda, T) = R(\lambda, S)\,(S - T)\,R(\lambda, T) \text{ für alle } \lambda \in \rho(S) \cap \rho(T).$$

(iv) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \delta \|T\|_{L(X)}$ für ein $\delta > 1$, so gilt:

$$\|\lambda R(\lambda, T)\|_{L(X)} < \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Lösung von Aufgabe 1

(i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt die Äquivalenz:

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(T) &\Leftrightarrow \lambda \mathrm{Id}_X - T \text{ ist bijektiv} \Leftrightarrow J^{-1}\left(\lambda \mathrm{Id}_X - T\right) \text{ ist bijektiv} \\ &\Leftrightarrow J^{-1}\left(\lambda \mathrm{Id}_X - T\right) J \text{ ist bijektiv} \\ &\Leftrightarrow \lambda - \widetilde{T} \text{ ist bijektiv} \Leftrightarrow \lambda \in \rho\left(\widetilde{T}\right), \end{aligned}$$

d.h.

$$\sigma(T) = \sigma\left(\widetilde{T}\right).$$

(ii) Sei $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{C}$.
Fall 1.: $\mu = 0$.
Dann ist $B = \lambda \mathrm{Id}_X$. Es gilt:

$$\widetilde{\lambda}\mathrm{Id}_X - B = \left(\widetilde{\lambda} - \lambda\right)\mathrm{Id}_X \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow \widetilde{\lambda} = \lambda.$$

Also ist $\rho(B) = \mathbb{C}\backslash\{\lambda\}$ und damit auch $\sigma(B) = \lambda + 0 \cdot \sigma(T)$.
Fall 2.: $\mu \neq 0$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda} \in \rho(B) &\Leftrightarrow \widetilde{\lambda}\mathrm{Id}_X - B = \widetilde{\lambda} - \left(\lambda \mathrm{Id}_X + \mu T\right) \text{ ist invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \mu \left[\frac{\widetilde{\lambda}}{\mu} - \left(\frac{\lambda}{\mu} - T\right)\right] \text{ ist invertierbar} \quad (\text{da } \mu \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{\widetilde{\lambda} - \lambda}{\mu} - T \text{ ist invertierbar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \; \frac{\widetilde{\lambda} - \lambda}{\mu} \in \rho(T) \\
&\Leftrightarrow \; \widetilde{\lambda} = \lambda + \mu \rho(T),
\end{aligned}$$

d.h.

$$\sigma(B) = \lambda + \mu\sigma(T).$$

(iii) Es gilt für alle $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$:

$$\begin{aligned}
R(\lambda, S) - R(\lambda, T) &= R(\lambda, S)\left(\mathrm{Id}_X - (\lambda \mathrm{Id}_X - S)\, R(\lambda, T)\right) \\
&= R(\lambda, S)\left((\lambda \mathrm{Id}_X - T) - (\lambda \mathrm{Id}_X - S)\right) R(\lambda, T) \\
&= R(\lambda, S)(S - T)R(\lambda, T).
\end{aligned}$$

(iv) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \delta \|T\|_{L(X)}$, damit ist insbesondere $\lambda \in \rho(T)$, da $\delta > 1$ ist. Nach der Vorlesung gilt durch die Potenzreihendarstellung der Resolventenfunktion:

$$\lambda R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n.$$

Damit gilt laut der Dreiecks-Ungleichung und der geometrischen Reihenformel:

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, T)\|_{L(X)} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-n} \|T\|_{L(x)}^n \\
&< \sum_{n=0}^{\infty} \left(\delta \|T\|_{L(X)}\right)^{-n} \|T\|_{L(X)}^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta}\right)^n \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{\delta}} \\
&= \frac{\delta}{1 - \delta}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Multiplikationsoperatoren)

(1) Seien $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $X := C_b^0(\Omega, \mathbb{C}) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt auf } \Omega\}$, $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{C^0(\Omega)}$, $m \in X$. Definiere die Abbildung:

$$M_m\colon X \to X,\; f \mapsto m \cdot f.$$

Zeigen Sie, dass M_m wohl-definiert, $M_m \in L(X)$ mit $\|M_m\|_{L(X)} = \|m\|_X$ ist. Geben Sie das Spektrum $\sigma(M_m)$ und die Resolventenfunktion $R(\lambda, M_m)$ für $\lambda \in \rho(M_m)$ an.

(2) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $m\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine μ-messbare Funktion, sowie $1 \leq p \leq \infty$. Definiere die Abbildung:

$$M_m f := m \cdot f$$

für Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie zuerst, dass

$$M_m \in L\left(L^p(\Omega, \mu)\right) \;\Leftrightarrow\; m \in L^\infty(\Omega, \mu).$$

In diesem Falle ist $\|M_m\|_{L(L^p(\Omega,\mu))} = \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$. Geben Sie anschließend das Spektrum $\sigma(M_m)$ an.

(3) Sei $X := l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ mit $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{l^2(\mathbb{Z})}$. Definiere den Operator

$$T\colon X \to X,\; u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \left(\frac{1}{2}\left(u_{n-1} + u_{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Zeigen Sie, dass T wohl-definiert, $T \in L(X)$ ist und bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(T)$.
Hinweis: Nutzen Sie den isometrischen Isomorphismus $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \to L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ und Aufgabe 1(i) mit Aufgabe 2(2).

Lösung von Aufgabe 2

(1) M_m **wohl-definiert:**
Für $f \in X$ ist $M_m f = m \cdot f \in X$, da das Produkt zweier stetiger und beschränkten Funktionen erneut stetig und beschränkt ist.
M_m **linear:** Klar, da das Produkt linear ist.
M_m **stetig:**
Weiter gilt offensichtlich die Abschätzung:

$$\|M_m f\|_X = \sup_{z\in\Omega} |m(z)f(z)| \leq \sup_{z\in\Omega} |m(z)| \sup_{z\in\Omega} |f(z)| = \|m\|_X \, \|f\|_X$$

für alle $f \in X$, d.h. $\|M_m\|_{L(X)} \leq \|m\|_X$. Für die andere Richtung setze $\widetilde{f} = \chi_\Omega$, dann ist $\widetilde{f} \in X$ mit $\left\|\widetilde{f}\right\|_X = 1$ und

$$\left\|M_m \widetilde{f}\right\|_X = \sup_{z\in\Omega} |m(z)\chi_\Omega(z)| = \sup_{z\in\Omega} |m(z)| = \|m\|_X \, .$$

Damit gilt:

$$\|M_m\|_{L(X)} = \|m\|_X \, .$$

$\sigma\left(M_m\right) = \overline{m(\Omega)}$**:**
" $\subseteq$ ": Sei $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \overline{m(\Omega)}$. Dadurch ist $z \mapsto \frac{1}{\lambda - m(z)} \in X$ und nach dem oberen Teil ist für alle $f \in X$

$$R_\lambda f := \frac{1}{\lambda - m} f = M_{\frac{1}{\lambda-m}} f \in X \text{ bzw.} R_\lambda \in L(X)$$

mit

$$\left(\lambda \mathrm{Id}_X - M_m\right) R_\lambda = R_\lambda \left(\lambda \mathrm{Id}_X - M_m\right) = \mathrm{Id}_X.$$

Damit folgt: $\lambda \in \rho\left(M_m\right)$ mit

$$R\left(\lambda, M_m\right) f = R_\lambda f = \frac{1}{\lambda - m} f, \;\; f \in X.$$

" $\supseteq$ ": Sei nun $\lambda \in m(\Omega)$. Dann gibt es ein $z_0 \in \Omega$ mit $\lambda 0 m\left(z_0\right)$. Demnach ist

$$\left(\lambda \mathrm{Id}_X - M_m\right) f\left(z_0\right) = \lambda f\left(z_0\right) - m\left(z_0\right) f\left(z_0\right) = 0 \text{ für alle } f \in X,$$

d.h.

$$\operatorname{range}\left(\lambda \mathrm{Id}_X - M_m\right) \subseteq \left\{g \in X : g\left(z_0\right) = 0\right\} \neq X.$$

Also ist $\lambda \mathrm{Id}_X - M_m$ nicht surjektiv, d.h. $\lambda \in \sigma\left(M_m\right)$. Aus der Abgeschlossenheit vom Spektrum folgt:

$$\overline{m(\Omega)} \subseteq \overline{\sigma\left(M_m\right)} = \sigma\left(M_m\right).$$

$\square$

(2) O.B.d.A.: $\mu(\Omega) > 0$, da. sonst $(\mu(\Omega) = 0)$ $L^p(\Omega, \mu) = \{0\}$ für alle $p \in [1, \infty]$ ist und wir $\|M_m\|_{L(L^p(\Omega,\mu))} = 0 = \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$ haben.
" $\Rightarrow$ ": Sei $M_m \in L\left(L^p(\Omega, \mu)\right)$. Annahme: $\|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} = \infty$. Dies bedeutet:

$$\infty = \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} = \inf\left\{r \geq 0 \colon \mu(|m| > r) = 0\right\}.$$

Demnach ist $\mu(|m| > n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Fixiere ein $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum ist, gibt es eine Folge von $\left(A_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit $\mu\left(A_k\right) \in (0, \infty)$ und

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Es gilt ebenfalls $\mu\left(A_k \cap \{|m| > n\}\right) > 0$ für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, denn sonst würde wegen der σ-Subadditivität

$$\begin{aligned}\mu\left(|m| > n\right) = \mu\left(\Omega \cap \{|m| > n\}\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cap \{|m| > n\}\right)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k \cap \{|m| > n\}\right) = 0\end{aligned}$$

gelten, was ein Widerspruch zur Annahme wäre. Wähle also $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\left(A_{k_0} \cap \{|m| > n\}\right) > 0$$

und setze $\Omega_n := A_k \cap \{|m| > n\}$. Setze

$$f_n := \mu\left(\Omega_n\right)^{-\frac{1}{p}} \chi_{\Omega_n}$$

für $p < \infty$ und $f_n := \chi_{\Omega_n}$ für $p = \infty$. Damit gilt:

$$normf_{n L^p(\Omega,\mu)} = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weiter folgt für $p < \infty$:

$$\begin{aligned}
\|M_m f_n\|_{L^p(\Omega,\mu)}^p &= \int_\Omega |m(x) f_n|^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \left| m(x) \mu\left(\Omega_n\right)^{-\frac{1}{p}} \chi_{\Omega_n}(x) \right|^p \mathrm{d}x \\
&= \mu\left(\Omega_n\right)^{-1} \int_{\Omega_n} |m(x)|^p \, \mathrm{d}x \\
&\geq \mu\left(\Omega_n\right)^{-1} \int_{\Omega_n} n^p \mathrm{d}x \\
&= n^p \\
\Leftrightarrow \quad \|M_m f_n\|_{L^p(\Omega,\mu)} &\geq n \to \infty, \\
\|M_m f_n\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |m(x) f_n(x)| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |m(x)\chi_{\Omega_n}(x)| \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_n} |m(x)| \\
&\geq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_n} n = n \to \infty
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Demnach wäre der Operator M_m unbeschränkt, was ein Widerspruch ist.
"$\Leftarrow$": Sei nun $m \in L^\infty(\Omega,\mu)$, so ist klar, dass M_m linear ist und es gilt für $p < \infty$

$$\begin{aligned}
\|M_m f\|_{L^p(\Omega,\mu)} &= \|mf\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |m(x) f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \left(\int_\Omega |m(x) f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} = \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)}, \\
\|M_m f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |m(x) f(x)| \\
&\leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |m(x)| \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| = \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}
\end{aligned}$$

für alle $f \in L^p(\Omega,\mu)$ bzw. $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$. Damit ist $M_m \in L\left(L^p(\Omega,\mu)\right)$ mit $\|M_m\|_{L(L^p(\Omega,\mu))} \leq \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$. Im Fall $p = \infty$ erhalten wir Gleicheit durch betrachten der Funktion $f = \chi_\Omega$ (wie bei (1)), denn dann gilt $\|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} = 1$ mit

$$\|M_m f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |m(x)\chi_\Omega(x)| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |m(x)| = \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)},$$

d.h.

$$\|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \leq \|M_m\|_{L(L^\infty(\Omega,\mu))} \leq \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)},$$

also $\|M_m\|_{L(L^\infty(\Omega,\mu))} = \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$. Betrachte von nun an also $p < \infty$. Um Gleichheit bei der Operatornorm zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$ beliebig und setze

$$\Omega_\varepsilon := \left\{ |m| > \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} - \varepsilon \right\}.$$

Wäre nun $\mu\left(\Omega_\varepsilon\right) = 0$, so würde nach Definition der L^∞-Norm

$$\|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \leq \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} - \varepsilon$$

gelten, was ein Widerspurch zu $\varepsilon > 0$ ist, also ist $\mu\left(\Omega_\varepsilon\right) > 0$. Da $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum ist, ist auch $(\Omega_\varepsilon, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Wähle wie oben eine Teilmenge $\widetilde{\Omega_\varepsilon} \subseteq \Omega_\varepsilon$ mit

$$0 < \mu\left(\widetilde{\Omega_\varepsilon}\right) < \infty.$$

Setze die Funktion

$$f_\varepsilon := \mu\left(\widetilde{\Omega_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}} \chi_{\widetilde{\Omega_\varepsilon}}.$$

Dann ist $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega,\mu)} = 1$ mit

$$\|M_m f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega,\mu)}^p = \int_\Omega \left| m(x) \mu\left(\widetilde{\Omega_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}} \chi_{\widetilde{\Omega_\varepsilon}}(x) \right|^p \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu\left(\widetilde{\Omega_\varepsilon}\right) \int_{\Omega_\varepsilon} |m(x)|^p \mathrm{d}x \\
&> \mu\left(\widetilde{\Omega_\varepsilon}\right) \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} - \varepsilon\right) \mathrm{d}x \\
&= \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} - \varepsilon \to \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}
\end{aligned}
$$

für $\varepsilon \to 0^+$, d.h.

$$\|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \leq \|M_m\|_{L(L^p(\Omega,\mu))} \leq \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)},$$

bzw.

$$\|M_m\|_{L(L^p(\Omega,\mu))} = \|m\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}.$$

Spektrum von M_m:
Wir zeigen für die Resolventenmenge:

$$\rho(M_m) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \text{Es gibt ein } \delta > 0 \text{ mit } \mu(|\lambda - \mu| < \delta) = 0\}.$$

" $\subseteq$ ": Sei $\lambda \in \rho(M_m)$ und setze $N_\lambda := \{\lambda - m = 0\}$. Da der Operator $\lambda \mathrm{Id}_{L^p(\Omega,\mu)} - M_m$ bijektiv ist, erhalten wir

$$\left(\lambda \mathrm{Id}_{L^p(\Omega,\mu)} - M_m\right) \chi_{N_\lambda} = 0 \ \Leftrightarrow\ \chi_{N_\lambda} = 0 \ \Leftrightarrow\ \mu(N_\lambda) = 0.$$

Also können wir die Resolventenfunktion $R(\lambda, M_m)$ auf $N_\lambda^C := \Omega \backslash N_\lambda$ ausdrücken durch

$$R(\lambda, M_m) f = \frac{1}{\lambda - m} f \text{ für } f \in L^p(\Omega,\mu).$$

Da $z \mapsto \frac{1}{\lambda - m(z)}$ eine μ-messbare Funktion ist, folgt nach obigen, dass $\frac{1}{\lambda - m} \in L^\infty(\Omega,\mu)$ ist. Also existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\mu\left(\frac{1}{|\lambda - m|} > C\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mu\left(|\lambda - m| < \frac{1}{C}\right) = 0,$$

d.h.

$$\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \text{Es gibt ein } \delta > 0 \text{ mit } \mu(|\lambda - \mu| < \delta) = 0\}.$$

" $\supseteq$ ": Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\mu(|\lambda - m| < \delta) = 0.$$

Dann ist per Definition $|\lambda - \mu(z)| \geq \delta$ für μ-fast alle $z \in \Omega$, was uns $r_\lambda := \frac{1}{m - \lambda} \in L^\infty(\Omega,\mu)$ liefert. Nach dem oberen Teil ist dadurch der Operator definiert durch $R_\lambda f := r_\lambda f$ stetig/ beschränkt auf $L^p(\Omega,\mu)$ und erfüllt die Gleichung

$$\left(\lambda \mathrm{Id}_{L^p(\Omega,\mu)} - M_m\right) R_\lambda f = R_\lambda \left(\lambda \mathrm{Id}_{L^p(\Omega,\mu)} - M_m\right) f = f$$

für alle $f \in L^p(\Omega,\mu)$. Also ist $\lambda \in \rho(M_m)$.
Damit folgt für das Spektrum von M_m:

$$\sigma(M_m) = \operatorname{ess\,range}(m) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \mu(|\lambda - m| < \delta) > 0 \text{ für alle } \delta > 0\}.$$

$\square$

(3) Laut Analysis III wissen wir, dass

$$\mathcal{B} := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot}\right)_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$$

eine abzählbare orthonormale Basis des Hilbertraumes $L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$ bildet, d.h. für alle $f \in L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$ gibt es Koeffizienten $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

für fast alle $\theta \in (0, 2\pi)$. Definiere den Isometrischen Isomorphismus durch

$$J \colon l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \to L^2((0,2\pi),\mathbb{C}),\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot}.$$

***J* linear:**
Klar, da die Reihe linear ist.

J injektiv/ isometrisch:
Sei $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ beliebig, so gilt:

$$\begin{aligned}
\|Ju\|_{L^2((0,2\pi),\mathbb{C})} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \mathrm{e}^{in\theta}\right|^2 \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} u_n\overline{u_m}\mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{-im\theta}\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} u_n\overline{u_m}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{-im\theta}\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} u_n\overline{u_m}2\pi\delta_n(m)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\overline{u_n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})},
\end{aligned}$$

d.h. $J \in L\left(l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}), L^2\left((0,2\pi),\mathbb{C}\right)\right)$ mit $\|J\|_{L(l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}),L^2((0,2\pi),\mathbb{C}))} = 1$. **$J$ surjektiv:**
Da $\mathcal{B}$ eine Basis von $L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$ ist, liefert uns für $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\mathrm{e}^{in\cdot}$ fast überall auf $(0,2\pi)$:

$$J\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\mathrm{e}^{in\theta} = f$$

fast überall auf $(0,2\pi)$, d.h. J ist surjektiv.
J^{-1}:
Die Umkehrabbildung lautet also:

$$J^{-1}\colon L^2((0,2\pi),\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}), f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\mathrm{e}^{in\theta} \mapsto \left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Ähnlicher Operator zu T:
Setze nun den ähnlichen Operator $\widetilde{T}$ zu T durch:

$$\widetilde{T} := JTJ^{-1}\colon L^2((0,2\pi),\mathbb{C}) \to L^2((0,2\pi),\mathbb{C}).$$

Sei $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\mathrm{e}^{in\theta} \in L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$. Wir berechnen $\widetilde{T}f$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}f(\theta) &= JTJ^{-1}f(\theta) = JT\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}(\theta) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_{n-1}\mathrm{e}^{in\theta} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_{n+1}\mathrm{e}^{in\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\mathrm{e}^{in\theta} \\
&= \cos(\theta)f(\theta)
\end{aligned}$$

für fast alle $\theta \in (0,2\pi)$. Da $\cos \in L^\infty((0,2\pi),\mathbb{C})$ ist mit

$$\operatorname{ess\,range}(\cos) = \overline{\operatorname{range}(\cos)} = [-1,1],$$

da die Cosinus-Funktion stetig ist. Also folgt nach (2):

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) = [-1,1].$$

Nach Aufgabe A1(i) gilt:

$$\sigma(T) = \sigma\left(\widetilde{T}\right) = [-1,1].$$

□

Aufgabe 3 (Kleines Spektrum)

Seien $X = C^0[0,1]$ mit $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{C^0[0,1]}$, $k \in C^0([0,1]\times[0,1])$. Definiere den Operator $T\colon X \to X$ durch

$$(Tf)(t) := \int_0^t k(t,s)f(s)\mathrm{d}s \text{ für } f \in X,\ t \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass T wohl-definiert ist mit $\|T\|_{L(X)} \leq \sup\limits_{t\in[0,1]} \int_0^t |k(t,s)|\,\mathrm{d}s$ und das Spektrum

$$\sigma(T) = \{0\}$$

besitzt.

Lösung von Aufgabe 3

Seien $f \in X$, $\varepsilon > 0$, $\widetilde{t} \in [0,1]$.
Stetigkeit von Tf:
O.B.d.A.: $f, k \neq 0$.
Da die Funktion k stetig ist auf $[0,1]\times[0,1]$ und $[0,1]\times[0,1]$ kompakt ist, ist die Funktion k gleichmäßig stetig auf $[0,1]\times[0,1]$, also existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|k(t_1,s_1) - k(t_2,s_2)| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_X}$$

gilt für alle $t_1, t_2 s_1, s_2 \in [0,1]$ mit

$$|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2| < \delta.$$

Sei nun $t \in [0,1]$ mit

$$\left|t - \widetilde{t}\right| < \max\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{2\|k\|_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X}\right\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left|Tf(t) - Tf\left(\widetilde{t}\right)\right| &= \left|\int_0^t k(t,s)f(s)\mathrm{d}s - \int_0^{\widetilde{t}} k\left(\widetilde{t},s\right)f(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_0^t k(t,s)f(s)\mathrm{d}s - \int_0^t k\left(\widetilde{t},s\right)f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t k\left(\widetilde{t},s\right)f(s)\mathrm{d}s - \int_0^{\widetilde{t}} k\left(\widetilde{t},s\right)f(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_0^t \left[k(t,s) - k\left(\widetilde{t},s\right)\right]f(s)\mathrm{d}s - \int_t^{\widetilde{t}} k\left(\widetilde{t},s\right)f(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_0^t \left|k(t,s) - k\left(\widetilde{t},s\right)\right||f(s)|\mathrm{d}s + \int_t^{\widetilde{t}} \left|k\left(\widetilde{t},s\right)\right||f(s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \frac{\varepsilon}{2\|f\|_X}\cdot\|f\|_X\,\mathrm{d}s + \left|\int_t^{\widetilde{t}} \|k\|_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}t + \|k\|_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\left|t - \widetilde{t}\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|k\|_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\frac{\varepsilon}{2\|k\|_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

d.h. die Funktion Tf ist stetig auf $[0,1]$ (da $\widetilde{t}$ beliebig war).
T linear:
T ist linear, da das Integral linear ist.
Stetigkeit von T:
Es gilt:

$$\|Tf\|_{L(X)} = \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t k(t,s)f(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t |k(t,s)|\,|f(s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t |k(t,s)|\,\mathrm{d}s\,\|f\|_X\,,
\end{aligned}
$$

d.h. T ist stetig auf X.
$\sigma(T)=\{0\}$**:**
Wir zeigen dazu, dass $r(T)=0$ ist, dafür zeigen wir induktiv:

$$
|T^n f(t)| \leq \frac{1}{n!} t^n \|k\|^n_{C^o([0,1]\times[0,1])} \|f\|_X \text{ für alle } n\in\mathbb{N},\ t\in[0,1].
$$

Sei $t\in[0,1]$ beliebig.
Induktionsanfang (IA): $(n=1)$ Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|Tf(t)| &= \left|\int_0^t k(t,s)f(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_0^t |k(t,s)|\,|f(s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \|k\|_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\,\mathrm{d}s \\
&= t\,\|k\|_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X \\
&= \frac{1}{1!}t^1\,\|k\|^1_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\,.
\end{aligned}
$$

Induktionsvorausseztung (IV): Sei $n\in\mathbb{N}$ fest, aber beliebig und für dieses n gelte

$$
|T^n f(s)| \leq \frac{1}{n!} s^n \|k\|^n_{C^0([0,1]\times[0,1])} \|f\|_X \text{ für alle } s\in[0,1].
$$

Induktionsschluss (IS): $(n\to n+1)$ Es gilt nach Induktionsvoraussetzung (IV):

$$
\begin{aligned}
\left|T^{n+1}f(t)\right| &= |T\left(T^n f\right)(t)| = \left|\int_0^t k(t,s)T^n f(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_0^t |k(t,s)|\,|T^n f(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \|k\|_{C^0([0,1]\times[0,1])}\frac{1}{n!}s^n\|k\|^n_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{n!}\|k\|^{n+1}_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\int_0^t s^n\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{n!}\|k\|^{n+1}_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\left[\frac{1}{n+1}s^{n+1}\right]_0^t \\
&= \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1}\|k\|^{n+1}_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\,.
\end{aligned}
$$

Aus der Abschätzung erhalten wir nun

$$
\|T^n f\|_X \leq \frac{1}{n!}\|k\|^n_{C^0([0,1]\times[0,1])}\|f\|_X\,,
$$

also gilt für die Operatornorm von T^n

$$
\|T^n\|_{L(X)} \leq \frac{1}{n!}\|k\|^n_{C^0([0,1]\times[0,1])}
$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Damit gilt laut Vorlesung:

$$
r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}_{L(X)} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\|k\|_{C^0([0,1]\times[0,1])}}{\sqrt[n]{n!}} = 0,
$$

nach den Stirlingschen Formeln. Da das Spektrum eines beschränkten/ stetigen Operators niemals leer ist (siehe Vorlesung), gilt:

$$
\sigma(T)=\{0\}.
$$

□