02.05.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

3. Übungsblatt

Aufgabe 1 ()

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ Banachräume für $n \in \mathbb{N}$ und $A\colon D(A) \subseteq X \to X$, $A_n\colon D(A_n) \subseteq X_n \to X_n$ lineare und abgeschlossene Operatoren, $p \in [1, \infty]$. Zeigen Sie:

(1) Setzen wir

$$\mathcal{A}_1 x := (Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ für } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\mathcal{A}_1) := \left\{x \in l^p(X) \mid x_n \in D(A) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ (Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(X)\right\},$$

so ist $\sigma_p(A) = \sigma_p(\mathcal{A}_1)$.

(2) Setzen wir

$$\mathcal{A}_2 x := (A_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$\text{für } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\mathcal{A}_2) := \left\{x \in l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \mid x_n \in D(A_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ (A_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right\},$$

so ist $\lambda \in \rho(\mathcal{A}_2)$ genau dann, wenn $\lambda \in \rho(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|R(\lambda, A_n)\|_{L(X_n)} < \infty$$

ist.

Wir betrachten hierbei die Folgenräume l^p definiert als

$$l^p(X) := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X\colon \|x\|_{l^p(X)} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\},$$
$$l^\infty(X) := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X\colon \|x\|_{l^\infty(X)} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty\right\},$$
$$l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in X_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\colon \|x\|_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\},$$
$$l^\infty\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in X_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\colon \|x\|_{l^\infty\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n} < \infty\right\}.$$

Aufgabe 2 (Zu den Teilspektren)

(1) Seien $X = C^0[0,1]$ mit $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{C^0[0,1]}$, $m \in X$ und $M_m\colon X \to X$ der zugehörige Multiplikationsoperator auf X. Bestimmen Sie die Teilspektren $\sigma_p(M_m), \sigma_c(M_m)$ und $\sigma_r(M_m)$.

(2) Setze nun

$$X := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist beschränkt und stetig in } 0 \text{ und } 1,\ f(0) = 0\}$$

mit $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{C^0[0,1]}$. Weiter sei $Mf(t) := tf(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Stellen Sie zuerst fest, dass X ein Banachraum ist und M ein wohl-definierter, beschränkter Operator mit Norm 1. Bestimmen Sie anschließend die Teilspektren: $\sigma_p(M), \sigma_c(M)$ und $\sigma_r(M)$.

Aufgabe 3 (Zu Dualen Operatoren)

(1) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum, $y \in X$ und $y' \in X'$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T_1 \colon X \to X,\ x \mapsto \langle x, y' \rangle_{X \times X'} y$$

ein linearer und beschränkter Operator auf X ist und bestimmen Sie den dualen Operator T_1'.

(2) Sei $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ beliebig. Setze den Operator

$$T_2 \colon L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}),\ f \mapsto m(\cdot) f(1 + \cdot).$$

Zeigen Sie, dass T_2 ein linearer und beschränkter Operator ist und bestimmen Sie T_2'.

(3) Setze den Operator

$$T_3 \colon L^1((0,1), \mathbb{R}) \to c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}),\ f \mapsto \left(\int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie, dass T_3 ein linearer und beschränkter Operator ist und bestimmen Sie T_3'. Wir bezeichnen hierbei den Raum $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ als den Raum aller (reellen) Nullfolgen mit der Norm $\|\cdot\|_{c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})} = \|\cdot\|_{l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})}$.