02.05.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

# Spektraltheorie

## 3. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

### Aufgabe 1 ()

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ Banachräume für $n \in \mathbb{N}$ und $A\colon D(A) \subseteq X \to X$, $A_n\colon D(A_n) \subseteq X_n \to X_n$ lineare und abgeschlossene Operatoren, $p \in [1, \infty]$. Zeigen Sie:

(1) Setzen wir

$$\mathcal{A}_1 x := (Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ für } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\mathcal{A}_1) := \left\{x \in l^p(X) \mid x_n \in D(A) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ (Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(X)\right\},$$

so ist $\sigma_p(A) = \sigma_p(\mathcal{A}_1)$.

(2) Setzen wir

$$\mathcal{A}_2 x := (A_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$\text{für } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\mathcal{A}_2) := \left\{x \in l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \mid x_n \in D(A_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ (A_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right\},$$

so ist $\lambda \in \rho(\mathcal{A}_2)$ genau dann, wenn $\lambda \in \rho(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|R(\lambda, A_n)\|_{L(X_n)} < \infty$$

ist.

Wir betrachten hierbei die Folgenräume $l^p$ definiert als

$$l^p(X) := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X\colon \|x\|_{l^p(X)} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\},$$
$$l^\infty(X) := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X\colon \|x\|_{l^\infty(X)} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty\right\},$$
$$l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in X_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\colon \|x\|_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\},$$
$$l^\infty\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in X_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\colon \|x\|_{l^\infty\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n} < \infty\right\}.$$

#### Lösung von Aufgabe 1

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}_1) \Leftrightarrow$ es existiert ein $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(\mathcal{A}_1)\setminus\{0\}$ mit $\mathcal{A}_1 x = \lambda x$.

$\Leftrightarrow$ es existiert ein $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(X)\setminus\{0\}$ so, dass $x_n \in D(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\left\|(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_{l^p(X)} < \infty$ ist, sowie $Ax_n = \lambda x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow$ es existiert ein $x \in D(A)\setminus\{0\}$ so, dass $Ax = \lambda x$.

$\Leftrightarrow$ $\lambda \in \sigma_p(A)$,

da für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(X)\setminus\{0\}$ mit $x_n \in D(A)$, $\left\|(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_{l^p(X)} < \infty$ und $Ax_n = \lambda x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wir ein Folgenglied $x_{n_0}$ finden mit $x_{n_0} \neq 0$, $x_{n_0} \in D(A)$ und $Ax_{n_0} = \lambda x_{n_0}$;

Ist anderenfalls $y \in D(A)\backslash\{0\}$ mit $Ay = \lambda y$, so wählen wir $x_1 = y$ und $x_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, so ist $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(X)\backslash\{0\}$ mit $x \subseteq D(A)$, $\left\|(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_{l^p(X)} = |\lambda| \, \|y\|_X < \infty$ und

$$\mathcal{A}_1 x = (Ay, 0, 0, \ldots) = (\lambda y, 0, 0, \ldots) = \lambda\,(y, 0, 0, \ldots) = \lambda x.$$

(2) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda \in \rho\left(\mathcal{A}_2\right) \Leftrightarrow\ & \lambda \mathrm{Id}_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} - \mathcal{A}_2 \text{ ist beschränkt invertierbar mit Inverser} \\
& \left(\lambda \mathrm{Id}_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} - \mathcal{A}_2\right)^{-1} x = \left(\left(\lambda \mathrm{Id}_{X_n} - A_n\right)^{-1} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ für alle } x = (x_n) \in l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \lambda \in \rho\left(A_n\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|R\left(\lambda, A_n\right)\right\|_{L(X_N)} < \infty,
\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\lambda \mathrm{Id}_{X_k} - A_k\right)^{-1} y\right\|_{X_k} &= \left\|\left(\left(\lambda \mathrm{Id}_{X_n} - A_n\right)^{-1} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} = \left\|\left(\lambda \mathrm{Id}_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} - \mathcal{A}_2\right)^{-1} x\right\|_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} \\
&\leq \left\|\left(\lambda \mathrm{Id}_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} - \mathcal{A}_2\right)^{-1}\right\|_{L\left(l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right)} \|x\|_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $x_n = y$ falls $y = k$ ist und $x_n = 0$ sonst $(n \in \mathbb{N})$. Damit ist

$$\left\|R\left(\lambda, A_k\right)\right\|_{L(X_k)} \leq \left\|\left(\lambda \mathrm{Id}_{l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} - \mathcal{A}_2\right)^{-1}\right\|_{L\left(l^p\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

□

## Aufgabe 2 (Zu den Teilspektren)

(1) Seien $X = C^0[0,1]$ mit $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{C^0[0,1]}$, $m \in X$ und $M_m \colon X \to X$ der zugehörige Multiplikationsoperator auf $X$. Bestimmen Sie die Teilspektren $\sigma_p\left(M_m\right), \sigma_c\left(M_m\right)$ und $\sigma_r\left(M_m\right)$.

(2) Setze nun
$$X := \{f \colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist beschränkt und stetig in 0 und 1, } f(0) = 0\}$$
mit $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{C^0[0,1]}$. Weiter sei $Mf(t) := tf(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Stellen Sie zuerst fest, dass $X$ ein Banachraum ist und $M$ ein wohl-definierter, beschränkter Operator mit Norm 1. Bestimmen Sie anschließend die Teilspektren: $\sigma_p\left(M\right), \sigma_c\left(M\right)$ und $\sigma_r\left(M\right)$.

### Lösung von Aufgabe 2

(1) Wir wissen bereits, dass $\sigma\left(M_m\right) = \overline{m([0,1])} = m([0,1])$ ist, insbesondere da $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist.

Ist $\lambda_0 \in m([0,1])$, so wählen wir eine Stelle $t_0 \in [0,1]$ mit $m\left(t_0\right) = \lambda_0$. Sei $g \in \operatorname{range}\left(\lambda_0 \mathrm{Id}_X - M_m\right)$, so gibt es eine Funktion $f \in X$ mit:
$$g\left(t_0\right) = \left(\lambda_0 \mathrm{Id}_X - M_m\right) f\left(t_0\right) = \left(\lambda_0 - m\left(t_0\right)\right) f\left(t_0\right) = 0,$$
d.h.
$$\overline{\operatorname{range}\left(\lambda_0 \mathrm{Id}_X - M_m\right)} \subseteq \overline{\{g \in X \colon g\left(t_0\right) = 0\}} = \{g \in X \colon g\left(t_0\right) = 0\} \neq X.$$
Damit ist $\operatorname{range}\left(\lambda_0 \mathrm{Id}_X - M_m\right)$ nicht dicht in $X$, also folgt:

$$\sigma_c\left(M_m\right) = \sigma_p\left(M_m\right).$$

Ist $\lambda_0 \in \sigma_p\left(M_m\right)$, so gibt es eine Eigenfunktion $f_0 \in X\backslash\{0\}$ mit

$$mf_0 = M_m f_0 = \lambda_0 f_0.$$

Die Funktion $f_0$ ist stetig und nicht-konstant null, daher finden wir $0 \leq a < b \leq 1$ mit $f_0(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Damit die Eigenwertgleichung oben erfüllt ist muss mindestens $m(x) = \lambda_0$ für alle $x \in [a,b]$ gelten. Also ist

$$\lambda_0 \in \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \text{es gibt } 0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \text{ mit } m(x) = \lambda \text{ für alle } x \in [\alpha, \beta]\} =: P(m).$$

Ist andererseits $\lambda_0 \in P(m)$, so finden wir $0 \leq a < b \leq 1$ mit $m(x) = \lambda_0$ für alle $x \in [a, b]$. Wähle nun $a < \alpha < \beta < b$ und eine stetige Funktion $f_0 \in X$ mit

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & x \notin [a, b] \\ \in [0,1], & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt:

$$M_m f_0(x) = m(x) f_0(x) = \lambda_0 f_0(x) \text{ für alle } x \in [0,1].$$

Also ist $\sigma_p(M_m) = P(m)$. Und damit folgt nun: $\sigma_r(M_m) = m([0,1])$. $\square$

(2) $X$ **ist ein Banachraum:** Der Raum

$$B := \{f : [0,1] \to \mathbb{C} | \ f \text{ ist beschränkt}\}$$

wird mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{C^0[0,1]}$ zu einem Banachraum und $X \subseteq B$.
Zu zeigen ist also, dass $X$ abgeschlossen ist in $B$.
Seien dazu $\varepsilon > 0$ beliebig, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ eine konvergente Folge in $B$ gegen $f \in B$. Dann ist $f$ beschränkt. Es gilt:

$$|f(0)| = |f(0) - f_n(0)| \leq \|f_n - f\|_X \to 0$$

für $n \to \infty$, d.h. $f(0) = 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_{n_0} - f\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Nun wähle ein $\delta_0 > 0$ mit

$$|f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in [0, \delta_0].$$

Dann folgt per Dreiecks-Ungleichung für alle $x \in [0, \delta_0]$:

$$|f(x) - f(0)\| = |f(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq \|f_{n_0} - f\|_X + |f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. $f$ ist stetig in der Null. Nun wähle ein $\delta_1 > 0$ mit

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(1)(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in [\delta_1, 1].$$

Dann folgt per Dreiecks-Ungleichung für alle $x \in [\delta_1, 1]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(1)\| &\leq |f(x) - f_{n_0}(1)| + |f_{n_0}(1) - f(1)| \\ &\leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(1)| + |f_{n_0}(1) - f(1)| \\ &\leq 2\|f_{n_0} - f\|_X + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(1)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. $f$ ist stetig in $x_0 = 1$. Damit ist $f \in X$ und somit ist $X$ abgeschlossen in $B$ und so auch ein Banachraum.
$M$ **wohl-definiert:** Der Operator $M$ ist wohl-definiert, denn für $f \in X$ ist $Mf(0) = 0 \cdot f(0) = 0$, stetig in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ als Produkt zweier stetiger Funktionenin diesen Punkten, beschränkt als Produkt zweier beschränkter Funktionen auf $[0,1]$.
$M \in L(X)$**:** Es ist klar, dass $M$ linear ist. Zu $f \in X$ gilt:

$$\|Mf\|_X = \sup_{t \in [0,1]} |tf(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|_X.$$

Andererseits gilt:

$$\left\|M\chi_{[0,1]}\right\|_X = \sup_{t \in [0,1]} |t| = 1$$

und $\left\|\chi_{[0,1]}\right\|_X = \sup_{t \in [0,1]} 1 = 1$, d.h. mit dem oberen: $\|M\|_{L(X)} = 1$.
Sei $\lambda \in \mathbb{C} \backslash [0,1]$. Dann ist $\frac{1}{\lambda - t} \in \mathbb{C}$ für alle $t \in [0,1]$ und wir können den Operator $R_\lambda : X \to X$ durch $R_\lambda f := \frac{1}{\lambda - t} f$, $f \in X$, auf $[0,1]$ definieren. Dieser ist wie oben auch wohl-definiert, linear und beschränkt. Zusätzlich gilt:

$$R_\lambda (\lambda - M) f = (\lambda - M) R_\lambda f = f$$

für alle $f \in X$. Dies heißt: $\lambda \in \rho(M)$ und somit ist $\sigma(M) \subseteq [0,1]$. Ist $\lambda \in (0,1)$, so setzen wir $f_\lambda := \chi_{\{\lambda\}}$ auf $[0,1]$, damit gilt: $f_\lambda \in X$ und

$$Mf_\lambda(t) = t\chi_{\{\lambda\}}(t) = \lambda \chi_{\{\lambda\}}(t) = \lambda f_\lambda(t)$$

für alle $t \in [0,1]$, d.h. $\lambda \in \sigma_p(M)$ und so auch $(0,1) \subseteq \sigma_p(M) \subseteq \sigma(M) \subseteq [0,1]$. Da das Spektrum stets abgeschlossen ist, folgt schonmal: $\sigma(M) = [0,1]$. Ist $\lambda = 0$, so folgt aus der Stetigkeit in Null von $f \in X$:

$$0 = Mf(t) = tf(t) \text{ für alle } t \in [0,1] \;\Leftrightarrow\; f(t) = 0 \text{ für alle } t \in (0,1] \;\Leftrightarrow\; f(t) = 0 \text{ für alle } t \in [0,1].$$

Also ist $M$ injektiv. Seien $g \in X$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Stetigkeit in Null von $g$ finden wir ein $\delta > 0$ mit $|g(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in [0,\delta]$. Setzen wir

$$f_\delta(t) := \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \delta, \\ \frac{g(t)}{t}, & \delta < t \le 1 \end{cases}$$

so ist $f_\delta \in X$ und

$$\|Mf_\delta - g\|_X = \sup_{t \in [0,\delta]} |g(t)| < \varepsilon.$$

Damit ist $0 \in \sigma_c(M)$. Ist $\lambda = 1$, so gilt wegen der Stetigkeit in $x_1 = 1$ von $f \in X$:

$$0 = (\mathrm{Id}_X - M)\, f(t) = (1-t)f(t) \text{ für alle } t \in [0,1] \;\Leftrightarrow\; f(t) = 0 \text{ für alle } t \in [0,1) \;\Leftrightarrow\; f(t) = 0 \text{ für alle } t \in [0,1].$$

Also ist $\mathrm{Id}_X - M$ injektiv. Sei $g \in \operatorname{range}(\mathrm{Id}_X - M)$, so wählen wir uns $f \in X$ mit

$$g(t) = (\mathrm{Id}_X - M)\, f(t) = (1-t)f(t) \text{ für alle } t \in [0,1].$$

Damit folgt: $g(1) = 0$, d.h.

$$\overline{\operatorname{range}(\mathrm{Id}_X - M)} \subseteq \overline{\{g \in X \colon g(1) = 0\}} = \{g \in X \colon g(1) = 0\}.$$

D.h. $1 \in \sigma_r(M)$. Damit ergibt sich:

$$\sigma(M) = [0,1];\; \sigma_p(M) = (0,1);\; \sigma_c(M) = [0,1);\; \sigma_r(M) = (0,1].$$

□

## Aufgabe 3 (Zu Dualen Operatoren)

(1) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum, $y \in X$ und $y' \in X'$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T_1 \colon X \to X,\; x \mapsto \langle x, y'\rangle_{X \times X'} y$$

ein linearer und beschränkter Operator auf $X$ ist und bestimmen Sie den dualen Operator $T_1'$.

(2) Sei $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ beliebig. Setze den Operator

$$T_2 \colon L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}),\; f \mapsto m(\cdot)f(1+\cdot).$$

Zeigen Sie, dass $T_2$ ein linearer und beschränkter Operator ist und bestimmen Sie $T_2'$.

(3) Setze den Operator

$$T_3 \colon L^1((0,1),\mathbb{R}) \to c_0(\mathbb{N},\mathbb{R}),\; f \mapsto \left(\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie, dass $T_3$ ein linearer und beschränkter Operator ist und bestimmen Sie $T_3'$. Wir bezeichnen hierbei den Raum $c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ als den Raum aller (reellen) Nullfolgen mit der Norm $\|\cdot\|_{c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})} = \|\cdot\|_{l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})}$.

### Lösung von Aufgabe 3

(1) Es ist klar, dass $T_1$ linear ist (die duale Klammer ist bilinear). Weiter ist $T_1$ beschränkt, denn es ist für alle $x \in X$:

$$\|T_1 x\|_X = \|\langle x, y'\rangle_{X\times X'} y\|_X = |\langle x, y'\rangle_{X\times X'}|\, \|y\|_X \le \|y\|_X\, \|y'\|_{X'}\, \|x\|_X\,,$$

d.h. $T_1 \in L(X)$ mit $\|T_1\|_{L(X)} \le \|y\|_X\, \|y'\|_{X'}$. Weiter gilt für alle $x \in X$ und $z' \in X'$:

$$\begin{aligned}\langle T_1 x, z'\rangle_{X\times X'} &= \langle \langle x, y'\rangle_{X\times X'} y, z'\rangle_{X\times X'} \\ &= \langle x, y'\rangle_{X\times X'}\, \langle y, z'\rangle_{X\times X'} \\ &= \langle x, \langle y, z'\rangle_{X\times X'} y'\rangle_{X\times X'}\,.\end{aligned}$$

Damit ist der duale Operator $T_1' \in L(X')$ von $T_1$ gegeben durch

$$T_1' z' = \langle y, z' \rangle_{X \times X'} y' \text{ für } z' \in X'.$$

(2) Der Operator $T_2$ ist linear, denn es ist:

$$T_2(\lambda f + \mu g) = m(\cdot)\left(\lambda f(1+\cdot) + \mu g(1+\cdot)\right) = \lambda m(\cdot) f(1+\cdot) + \mu m(\cdot) g(1+\cdot) = \lambda T_2 f + \mu T_2 g$$

für alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Weiter ist $T_2$ beschränkt, da wir für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\|T_2 f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |m(x) f(1+x)| \,\mathrm{d}x \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |f(1+x)| \mathrm{d}x = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \mathrm{d}y = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

haben, d.h. $T_2 \in L\left(L^1(\mathbb{R})\right)$ mit $\|T_2\|_{L(L^1(\mathbb{R}))} \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Weiter gilt für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cong \left(L^1(\mathbb{R})\right)'$:

$$\begin{aligned}\langle T_2 f, g \rangle_{L^1(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R})} &= \langle m(\cdot) f(1+\cdot), g \rangle_{L^1(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} m(x) f(1+x) g(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(y) m(y-1) g(y-1) \mathrm{d}y \\ &= \langle f, m(\cdot - 1) g(\cdot - 1) \rangle_{L^1(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

damit ist $T_2' \in L(L^\infty(\mathbb{R}))$ definiert durch

$$T_2' g = m(\cdot - 1) g(\cdot - 1) \text{ für } g \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

(3) Es gilt für alle $f \in L^1(0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ und $t \in (0,1)$:

$$|t^n f(t)| \leq |f(t)|.$$

Für $f \in L^1(0,1)$ folgt nach dem Satz von Lebesgue:

$$\lim_{n\to\infty} T_3 f = \lim_{n\to\infty} \left( \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t \right)_{n\in\mathbb{N}} = \int_0^1 \chi_1(t) f(t) \mathrm{d}t = 0,$$

d.h. $T_3 f \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und damit ist $T_3$ wohl-definiert. Offensichtlich ist $T_3$ linear (da das Integral linear ist). Weiter ist $T_3$ beschränkt, denn für alle $f \in L^1(0,1)$ ist

$$\|T_3 f\|_{c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t \right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 |t^n f(t)| \,\mathrm{d}t \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t = \|f\|_{L^1(0,1)},$$

d.h. $T_3 \in L\left(L^1(0,1), c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})\right)$ mit $\|T_3\|_{L(L^1(0,1), c_0(\mathbb{N},\mathbb{R}))} \leq 1$. Es gilt für alle $f \in L^1(0,1)$ und $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \cong (c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$ gilt:

$$\langle T_3 f, a \rangle_{c_0(\mathbb{N},\mathbb{R}), l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t a_n = \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 f(t) a_n t^n \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t) \sum_{n=1}^\infty a_n t^n \mathrm{d}t = \left\langle f, \sum_{n=1}^\infty a_n (\cdot)^n \right\rangle_{L^1(0,1) \times L^\infty(0,1)},$$

damit ist $T_3' \in L\left(l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}), L^\infty(0,1)\right)$ gegeben durch

$$T_3' a = \sum_{n=1}^\infty a_n (\cdot)^n \text{ für } a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}).$$

□