08.05.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Spektrum von A^n)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ ein linear, abgeschlossener Operator mit $\rho(A) \neq \emptyset$.

(i) Geben Sie induktiv einen sinnvollen Definitionsbereich von A^n, $n \in \mathbb{N}$ an.

(ii) Zeigen Sie für $\lambda \in \rho(A)$, die Normäquivalenz:

$$c\,\|x\|_A := c\,(\|x\|_X + \|Ax\|_X) \leq \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X \leq C\,\|x\|_A$$

für alle $x \in D(A)$ für Konstanten $c, C > 0$.

(iii) Leiten Sie so induktiv her, dass

$$\lambda \mathrm{Id}_X - A\colon\ (D(A^n), \|\cdot\|_{A^n}) \to \left(D\left(A^{n-1}\right), \|\cdot\|_{A^{n-1}}\right)$$

ein Isomorphismus ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Folgern Sie, dass

$$\sigma(A^n) = \{\lambda^n \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 2 (Äquivalente Charakterisierung von Abschließbar)

Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume und $A\colon D(A) \subseteq X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist abschließbar.

(ii) $\overline{\mathrm{graph}(A)} \subseteq X \times Y$ ist der Graph einer Funktion.

(iii) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$, $y \in Y$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ in X und $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$ in Y folgt $y = 0$.

In diesem Fall ist

$$\mathrm{graph}\left(\overline{A}\right) = \overline{\mathrm{graph}(A)} \subseteq X \times Y.$$

Aufgabe 3 (Zu (nicht-)abschließbaren Operatoren)

(1) Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum und $A_1\colon D(A_1) \subseteq H \to H$ ein linearer, dicht-definierter und symmetrischer Operator, d.h. für alle $x, y \in D(A_1)$ gilt:

$$\langle A_1 x, y\rangle_H = \langle x, A_1 y\rangle_H\,.$$

Zeigen Sie, dass A_1 abschließbar ist.

(2) Sei nun $H = L^2([0,1])$. Definiere den Operator $A_2 \colon C^0[0,1] \subseteq H \to H$ durch

$$A_2 f = f(0).$$

Zeigen Sie, dass A_2 ein linearer und dicht-definierter Operator ist, er aber nicht abschließbar sein kann.

Aufgabe 4 (Annihilatoren)

(1) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein linearer Teilraum von X. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T_1 \colon X'/Y^\perp \to Y',\ T_1\left(x' + Y^\perp\right) = x'|_Y$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

(2) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein linearer, abgeschlossener Teilraum von X. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T_2 \colon (X/Y) \to Y^\perp,\ T_2(\varphi) = \varphi \circ Q$$

ein isometrischer Isomorphismus ist, wobei

$$Qx = \widehat{x} = x + Y$$

die Quotientenabbildung ist.