08.05.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Spektraltheorie

4. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Spektrum von A^n)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ ein linear, abgeschlossener Operator mit $\rho(A) \neq \emptyset$.

(i) Geben Sie induktiv einen sinnvollen Definitionsbereich von A^n, $n \in \mathbb{N}$ an.

(ii) Zeigen Sie für $\lambda \in \rho(A)$, die Normäquivalenz:

$$c\,\|x\|_A := c\left(\|x\|_X + \|Ax\|_X\right) \leq \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X \leq C\,\|x\|_A$$

für alle $x \in D(A)$ für Konstanten $c, C > 0$.

(iii) Leiten Sie so induktiv her, dass

$$\lambda \mathrm{Id}_X - A\colon \left(D\left(A^n\right), \|\cdot\|_{A^n}\right) \to \left(D\left(A^{n-1}\right), \|\cdot\|_{A^{n-1}}\right)$$

ein Isomorphismus ist für alle $n \in \mathbb{N}$ für ein $\lambda \in \rho(A)$.

(iv) Folgern Sie, dass

$$\sigma\left(A^n\right) = \{\lambda^n \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Lösung von Aufgabe 1

(i) Wir definieren $D\left(A^1\right) := D(A)$ und

$$\begin{aligned} D\left(A^n\right) &:= \left\{x \in D(A)\colon Ax \in D\left(A^{n-1}\right)\right\} \\ &= \left\{x \in D(A)\colon A^{n-1}x \in D(A)\right\} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
(ii) Seien $x \in D(A)$ und $\lambda \in \rho(A)$ (da $\rho(A) \neq \emptyset$ ist) fest, aber beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_X &= \|R(\lambda, A)\,(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X + \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x - \lambda x\|_X \\ &\leq \|R(\lambda, A)\|_{L(X)}\,\|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X + \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X + |\lambda|\,\|x\|_X \\ &= \left(\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} + 1\right)\|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X + |\lambda|\,\|R(\lambda, A)\,(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X \\ &\leq \left(\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} + 1\right)\|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X + |\lambda|\,\|R(\lambda, A)\|_{L(X)}\,\|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X \\ &= \left(\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} + 1 + |\lambda|\,\|R(\lambda, A)\|_{L(X)}\right)\|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\,x\|_X = \|\lambda x - Ax\|_X &\leq |\lambda|\,\|x\|_X + \|Ax\|_X \\ &\leq \max\{|\lambda|, 1\}\left(\|x\|_X + \|Ax\|_X\right) \\ &= \max\{|\lambda|, 1\}\,\|x\|_A\,. \end{aligned}$$

Damit sind die beiden Normen äquivalent.
(iii) Sei hierbei $\lambda \in \rho(A)$ (da $\rho(A) \neq \emptyset$ ist) fest, aber beliebig. Wir zeigen zuerst, dass A^n abgeschlossen ist und dann noch induktiv, falls $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Nullfolge ist und $\lim\limits_{k\to\infty} A^n x_k = 0 \in X$ in X ist, so folgt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} A^l x_k = 0$ in X ist für alle $l \in \{1, \ldots, n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei also $n \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig.

Induktionsanfang: ($l=1$) Seien $y \in X$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ in X und $\lim\limits_{k\to\infty} A^{n+1}x_k = y$ in X. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}(\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n} A^{n+1}x_k &= -(\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n}(\lambda \mathrm{Id}_X - A) A^n x_k + \lambda (\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n} A^n x_k \\ &= \ldots \\ &= (-1)^n A x_k + \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha(l)} (\lambda \mathrm{Id}_x - A)^{-\beta(l)} x_k \\ &\to (-1)^n \lim_{k\to\infty} A x_k \text{ in } X \text{ für } k\to\infty,\end{aligned}$$

da $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ in X und alle Potenzen der Resolvente stetig sind, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n} A^{n+1}x_k = (\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n} y \text{ in } X.$$

(Hinter ... verbirgt sich immer dasselbe Argument: Man schreibt statt A einfach $-(\lambda \mathrm{Id}_X - A) + \lambda \mathrm{Id}_X$ und kürzt gegebenenfalls mit der Resolvente weg, sofern es geht. Die Funktionen $\alpha, \beta\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ beschreiben dabei die auftretenden Potenzen von λ bzw. der Resolventen.) Nun folgt aus der Abgeschlossenheit von A, dass

$$\lim_{k\to\infty} A^1 x_k = (-1)^n (\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n} y = 0$$

ist, d.h. mit der Injektivität von $(\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n}$ ergibt sich $y=0$. Also ist A^{n+1} abgeschlossen für ein alle $n\in\mathbb{N}$.
Induktionsvoraussetzung: Sei nun $N \in \{1,\ldots,n\}$ fest, aber beliebig und es gelte für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ in X und $\lim\limits_{k\to\infty} A^{n+1}x_k = 0$ in X, dass

$$\lim_{k\to\infty} A^l x_k = 0 \text{ in } X \text{ für alle } l \in \{1,\ldots,N\}.$$

Induktionsschluss: ($N \to N+1$) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ in X und $\lim\limits_{k\to\infty} A^{n+1}x_k = 0$ in X. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}(\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n+N} A^{n+1}x_k &= -(\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n+N}(\lambda \mathrm{Id}_X - A) A^n x_k + \lambda (\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n+N} A^n x_k \\ &= \ldots \\ &= (-1)^{n-N} A^{N+1} x_k + \sum_{l=1}^{n-N} \lambda^{\alpha(l)} (\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-\beta(l)} A^N x_k \\ &\to (-1)^{n-N} \lim_{k\to\infty} A^{N+1} x_k \text{ in } X \text{ für } k\to\infty,\end{aligned}$$

da $\lim\limits_{k\to\infty} A^N x_k = 0$ in X (nach Induktionsvoraussetzung) und alle Potenzen der Resolvente stetig sind, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-n+N} A^{n+1}x_k = 0 \text{ in } X.$$

Dies impliziert:

$$\lim_{k\to\infty} A^{N+1}x_k = 0 \text{ in } X.$$

Dies war in der Induktion zu zeigen. (**Bemerkung:** Die im Induktionsschluss benutzten Funktionen α und β für die Potenzen können sich von denen im Induktionsanfang unterscheiden.)
Nun gilt für alle $x \in D(A^n)$:

$$\begin{aligned}\|x\|_X &= \left\|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)^{-1}(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\right\|_X \le \|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\|_X \\ &\le \|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\|_{A^{n-1}}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|A^n x\|_X &= \left\|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)A^{n-1} - \lambda x\right\|_X \le \left\|A^{n-1}(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\right\|_X + |\lambda| \|x\|_X \\ &\le \left\|A^{n-1}(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\right\|_X + |\lambda| \|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\|_X \\ &\le \max\left\{1, |\lambda| \|R(\lambda, A)\|_{L(X)}\right\} \left(\left\|A^{n-1}(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\right\|_X + \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\|_X\right) \\ &= \max\left\{1, |\lambda| \|R(\lambda, A)\|_{L(X)}\right\} \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\|_{A^{n-1}},\end{aligned}$$

d.h.

$$\|x\|_{A^n} = \|x\|_X + \|A^n x\|_X \le 2\max\left\{1, |\lambda| \|R(\lambda, A)\|_{L(X)}, \|R(\lambda, A)\|_{L(X)}\right\} \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)x\|_{A^{n-1}}.$$

Der Operator $\lambda \mathrm{Id}_X - A\colon (D(A^n), \|\cdot\|_{A^n}) \to \left(D\left(A^{n-1}\right), \|\cdot\|_{A^{n-1}}\right)$ ist wohl-definiert, denn für $x \in D(A^n)$ ist

$$(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\, x = \lambda x + Ax \in D(A^n) + D\left(A^{n-1}\right) = D\left(A^{n-1}\right),$$

d.h. $\mathrm{range}\,(\lambda \mathrm{Id}_X - A) \subseteq D\left(A^{n-1}\right)$. Es ist klar, dass der Operator $\lambda \mathrm{Id}_X - A$ linear ist. Weiter ist dieser auch stetig, denn für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D(A^n)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ in $(D(A^n), \|\cdot\|_{A^n})$ folgt:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 = \lim_{k\to\infty} A^n x_k \text{ in } X.$$

Nach der obigen Induktion wissen wir nun, dass für alle $l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} A^l x_k = 0 \text{ in } X.$$

Insbesondere werden wir dies für $l = 1$ und $l = n-1$ nun benutzen:

$$\begin{aligned}
\|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\, x_k\|_{A^{n-1}} &= \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\, x_k\|_X + \left\|A^{n-1}(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\, x_k\right\|_X \\
&= \|\lambda x_k - Ax_k\|_X + \left\|\lambda A^{n-1} x_k - A^n x_k\right\|_X \\
&\le |\lambda|\, \|x_k\|_X + \|Ax_k\|_X + |\lambda| \left\|A^{n-1} x_k\right\|_X + \|A^n x_k\|_X \\
&\to 0 \text{ für } k \to \infty
\end{aligned}$$

und damit ist der Operator $\lambda \mathrm{Id}_X - A\colon (D(A^n), \|\cdot\|_{A^n}) \to \left(D\left(A^{n-1}\right), \|\cdot\|_{A^{n-1}}\right)$ stetig. Damit gibt es nun insbesondere Konstanten $c, C > 0$ mit

$$c\, \|x\|_{A^n} \le \|(\lambda \mathrm{Id}_X - A)\, x\|_{A^{n-1}} \le C\, \|x\|_{A^n} \quad \text{für alle } x \in D(A^n).$$

Damit ist der Operator $\lambda \mathrm{Id}_X - A$ injektiv. Er ist auch surjektiv, denn für ein $y \in D\left(A^{n-1}\right) \subseteq X$ ist $x := R(\lambda, A)y \in D(A)$ und

$$Ax = AR(\lambda, A)y = y - \lambda R(\lambda, A)y = y - \lambda x \in D\left(A^{n-1}\right) + D(A) = D(A),$$

d.h. $x \in D\left(A^2\right)$. Induktiv erhalten wir somit:

$$x \in D\left(A^l\right) \quad \text{für alle } l \in \{1, \ldots, n\}.$$

Damit ist $\lambda \mathrm{Id}_X - A$ ein Isomorphismus.
(iv) Seien $\mu \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann können wir wegen (iii)

$$\mu - A^n = (\lambda_1 - A) \cdot (\lambda_2 - A) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - A)$$

schreiben mit λ_j ist eine n-te Wurzel von μ für $j = 1, \ldots, n$. Nun ist die linke Seite genau dann beschränkt invertierbar, wenn jeder Faktor auf der rechten Seite beschränkt invertierbar ist, d.h.

$$\begin{aligned}
\mu \in \rho(A^n) &\Leftrightarrow \lambda_j \in \rho(A) \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\} \\
&\Leftrightarrow \mu = \lambda_j^n \in \rho(A^n),
\end{aligned}$$

d.h.

$$\sigma(A^n) = \{\lambda^n \colon \lambda \in \sigma(A)\}.$$

(Wir benötigen (iii) hier, damit das Produkt oben auf der rechten Seite wohl-definiert ist und wir wissen, dass wir Isomorphismen haben.) □

Aufgabe 2 (Äquivalente Charakterisierung von Abschließbar)

Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume und $A\colon D(A) \subseteq X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist abschließbar.

(ii) $\overline{\mathrm{graph}(A)} \subseteq X \times Y$ ist der Graph einer Funktion.

(iii) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$, $y \in Y$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ in X und $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$ in Y folgt $y = 0$.

In diesem Fall ist

$$\mathrm{graph}\left(\overline{A}\right) = \overline{\mathrm{graph}(A)} \subseteq X \times Y.$$

Lösung von Aufgabe 2

(i)⇒(ii): Sei A abschließbar, d.h. $\overline{A}$ ist abgeschlossen. Sei $(x,y) \in \overline{\operatorname{graph}(A)}$. Wähle dazu zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element $(x_n, y_n) \in \operatorname{graph}(A)$ so, dass

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y) \text{ in } X \times Y.$$

Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \overline{A}x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = y_n \to y \text{ in } Y.$$

Also folgt, da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in X und $\overline{A}$ abgeschlossen ist, dass $(x,y) \in \operatorname{graph}\left(\overline{A}\right)$.

(ii)⇒(iii): Sei B der Operator mit $\operatorname{graph}(B) = \overline{\operatorname{graph}(A)}$. Dann ist B linear mit abgeschlossenem Graphen, damit ist B abgeschlossen. Seien nun $y \in Y$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ in X und $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$ in Y. Dann folgt:

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Bx_n.$$

Aus der Abgeschlossenheit von B folgt nun: $y = 0$.

(ii)⇒(i): Sei B der Operator mit $\operatorname{graph}(B) = \overline{\operatorname{graph}(A)}$. Dann ist B linear mit abgeschlossenem Graphen, damit ist B abgeschlossen. Dann gilt für $x \in D(A)$:

$$Bx = Ax.$$

(iii)⇒(ii): <u>Annahme</u>: $\overline{\operatorname{graph}(A)}$ ist kein Graph eines Operators.

Dann existieren $x \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ mit $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{\operatorname{graph}(A)}$ und $y_1 \neq y_2$. Wähle nun Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ in X und $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} Az_n = y_2$ in Y. Dann folgt:

$$y := y_1 - y_2 = \lim_{n\to\infty} Ax_n - \lim_{n\to\infty} Az_n = \lim_{n\to\infty} (Ax_n - Az_n) = \lim_{n\to\infty} A(x_n - z_n) \text{ in } Y.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - z_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} z_n = x - x = 0 \text{ in } X$$

und (ii) folgt: $y_1 - y_2 = y = 0$, d.h. $y_1 = y_2$. Dies ist ein Widerspruch. □

Aufgabe 3 (Zu (nicht-)abschließbaren Operatoren)

(1) Seien $(H, \langle, \cdot, \cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum und $A_1 \colon D(A_1) \subseteq H \to H$ ein linearer, dicht-definierter und symmetrischer Operator, d.h. für alle $x, y \in D(A_1)$ gilt:

$$\langle A_1 x, y\rangle_H = \langle x, A_1 y\rangle_H.$$

Zeigen Sie, dass A_1 abschließbar ist.

(2) Sei nun $H = L^2([0,1])$. Definiere den Operator $A_2 \colon C^0[0,1] \subseteq H \to H$ durch

$$A_2 f = f(0).$$

Zeigen Sie, dass A_2 ein linearer und dicht-definierter Operator ist, er aber nicht abschließbar sein kann.

Lösung von Aufgabe 3

(i) Wegen $H' = H$ ist damit $D(A_1) \subseteq D(A_1')$ und

$$H = \overline{D(A_1)} \subseteq \overline{D(A_1')} \subseteq \overline{H} = H, \text{ d.h. } \overline{D(A_1')} = H.$$

Damit ist $D(A_1')$ dicht in H (A_1' ist dicht definiert). Nach Vorlesung folgt nun, dass A_1 abschließbar ist. □

(ii) Es ist $C^0[0,1] \subseteq L^2(0,1)$ dicht. Weiter gilt für alle $f, g \in L^2(0,1)$:

$$\langle A_2 f, g\rangle_{L^2(0,1)\times L^2(0,1)} = \int_0^1 A_2 f(x) g(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(0) g(x) \mathrm{d}x = f(0) \int_0^1 g(x) \mathrm{d}x.$$

Damit wir die Gleichheit:

$$f(0) \int_0^1 g(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) A_2' g(x) \mathrm{d}x$$

für alle $f \in C^0[0,1]$ und $g \in D(A_2') \subseteq L^2(0,1)$ haben, muss $A_2'g = 0$ für alle $g \in D(A_2')$ sein. Dies folgt aus $f \in C_c^0(0,1) \subseteq C^0[0,1]$, denn dann ist $f(0) = 0$ und so müsste

$$0 = \int_0^1 f(x) A_2' g(x) \mathrm{d}x$$

für alle $g \in D(A_2') \subseteq L^2(0,1)$ gelten, damit ist $\mathrm{range}(A_2') \subseteq C_c^0(0,1)^\perp = \{0\}$, da $C_c^0(0,1) \subseteq L^2(0,1)$ dicht ist. Nun folgt aber für alle $f \in C^0[0,1]$ mit $f(0) \neq 0$ und $g \in D(A_2')$:

$$0 = f(0) \int_0^1 g(x) \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \int_0^1 g(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Damit wäre der Definitionsbereich vom Operator A_2':

$$D(A_2') = \left\{ g \in L^2(0,1) \colon \int_0^1 g(x) \mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

Nun gilt aber für Funktionen $g, h \in L^2(0,1)$ nach der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 g(x) \mathrm{d}x - \int_0^1 h(x) \mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^1 (g(x) - h(x)) \, \mathrm{d}x \right| &\leq \int_0^1 |g(x) - h(x)| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \|g - h\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

dies liefert, dass $D(A_2')$ abgeschlossen ist in $L^2(0,1)$, aber es ist $\int_0^1 \chi_{[0,1]}(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 1 \mathrm{d}x = 1 \neq 0$ und $\chi_{[0,1]} \in L^2(0,1)$. Damit ist $D(A_2')$ nicht dicht in $L^2(0,1)$, also ist der Operator A_2' nicht dicht-definiert. □

Aufgabe 4 (Annihilatoren)

(1) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein linearer Teilraum von X. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T_1 \colon X'/Y^\perp \to Y', \; T_1\left(x' + Y^\perp\right) = x'|_Y$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

(2) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein linearer, abgeschlossener Teilraum von X. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T_2 \colon (X/Y) \to Y^\perp, \; T_2(\varphi) = \varphi \circ Q$$

ein isometrischer Isomorphismus ist, wobei

$$Qx = \widehat{x} = x + Y$$

die Quotientenabbildung ist.

Lösung von Aufgabe 4

Es ist X' ein Banachraum, $Y^\perp$ abgeschlossen in X', daher ist $X'/Y^\perp$ ein Banachraum.
(1) T_1 **wohl-definiert**: Es ist klar, dass $x'|_Y \in Y'$ ist für alle $x \in X'$. Nun seien zwei Vertreter $x', z' \in X'$ derselben Äquivalenzklasse, d.h.

$$x' + Y^\perp = z' + Y^\perp.$$

Dann gilt die Äquivalenz:

$$x' - z' \in Y^\perp \;\Leftrightarrow\; (x' - z')|_Y = 0 \;\Leftrightarrow\; x'|_Y = z'|_Y.$$

Also ist T_2 wohl-definiert.
T_1 **linear**: Dies ist trivial, denn für alle $x', z' \in X'$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} T_1\left(\lambda\left(x' + Y^\perp\right) + \mu\left(z' + Y^\perp\right)\right) &= T_1\left(\lambda x' + Y^\perp + \mu z' + Y^\perp\right) = T_1\left((\lambda x' + \mu z') + Y^\perp\right) \\ &= (\lambda x' + \mu z')|_Y = \lambda x'|_Y + \mu z'|_Y = \lambda T_1\left(x' + Y^\perp\right) + \mu T_1\left(z' + Y^\perp\right). \end{aligned}$$

T_1 **stetig**: Wir schätzen für alle $x' \in X'$ ab, da $Y \subseteq X$ ist:

$$\left\|x' + Y^\perp\right\|_{X'/Y^\perp} = \inf_{y' \in Y^\perp} \|x' - y'\|_{X'} = \inf_{y' \in Y^\perp} \sup_{x \in X \colon \|x\|_X \leq 1} |x'(x) - y'(x)|$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \inf_{y \in Y^\perp} \sup_{x \in Y:\, \|x\|_X \leq 1} |x'(x) - y'(x)| = \inf_{y \in Y^\perp} \sup_{x \in Y:\, \|x\|_X \leq 1} |x'(x)| \\
&= \sup_{x \in Y:\, \|x\|_X \leq 1} |x'|_Y(x)| = \|x'|_Y\|_{Y'} = \left\|T_1\left(x' + Y^\perp\right)\right\|_{Y'}.
\end{aligned}
$$

Also ist T_1 stetig.
T_1 **surjektiv**: Sei $y' \in Y'$. Laut dem Satz von Hahn-Banach finden wir eine stetige Erweiterung $x' \in X'$ mit $x'|_Y = y'$ und $\|X'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}$. Dann gilt:

$$
T_1\left(x' + Y^\perp\right) = x'|_Y = y.
$$

T_1 **isometrisch**: Sei $x' \in X'$. Wähle laut dem Satz von Hahn-Banach die stetige Fortsetzung $z' \in X'$ mit $z'|_Y = x'|_Y$ und $\|z'\|_{X'} = \|y`\|_{Y'}$. Dann gilt wegen $x'|_Y = z'|_Y$ und der Äquivalenz im Teil der Wohl-Definiertheit, dass auch die Äquivalenzklassen gleich sind:

$$
x' + Y^\perp = z' + Y^\perp.
$$

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\left\|T_1\left(x' + Y^\perp\right)\right\|_{Y'} &= \|x'|_Y\|_{Y'} = \|z'\|_{X'} \geq \inf_{y' \in Y^\perp} \|z' - y'\|_{X'} \\
&= \left\|z' + Y^\perp\right\|_{X'/Y^\perp} = \left\|x' + Y^\perp\right\|_{X'/Y^\perp}.
\end{aligned}
$$

Damit ist T_1 injektiv und mit der Stetigkeitsabschätzung folgt:

$$
\left\|T_1\left(x' + Y^\perp\right)\right\|_{Y'} = \left\|x' + Y^\perp\right\|_{X'/Y^\perp},
$$

d.h. T_1 ist isometrisch. □

(2) T_2 **wohl-definiert**: Sei $\varphi \in (X/Y)'$. So gilt:

$$
\begin{aligned}
|T_2(\varphi)(x)| &= |(\varphi \circ Q)(x)| = |\varphi(x + Y)| \leq \|\varphi\|_{(X/Y)'} \|x + Y\|_{X/Y} \\
&= \|\varphi\|_{(X/Y)'} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X \leq \|\varphi\|_{(X/Y)'} \inf_{y \in Y} (\|x\|_X + \|y\|_X) = \|\varphi\|_{(X/Y)'} \|x\|_X
\end{aligned}
$$

für alle $x \in X$. Dies liefert direkt $\|T_2(\varphi)\|_{X'} \leq \|\varphi\|_{(X/Y)'}$ und da $T_2(\varphi)$ linear ist, wissen wir nun dass $T_2(\varphi)$ stetig ist. Weiter gilt für alle $y \in Y$:

$$
T_2(\varphi)(y) = (\varphi \circ Q)(y) = \varphi(y + Y) = \varphi(Y) = 0,
$$

d.h. $T_2(\varphi) \in Y^\perp$.
T_2 **ist linear**: Für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in (X/Y)'$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ folgt:

$$
T_2\left(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2\right) = \left(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2\right) \circ Q = \lambda\varphi_1 \circ Q + \mu\varphi_2 \circ Q = \lambda T_2\left(\varphi_1\right) + \mu T_2\left(\varphi_2\right).
$$

T_2 **stetig**: Nach dem Abschnitt der Wohl-Definiertheit gilt:

$$
\|T_2(\varphi)\|_{X'} \leq \|\varphi\|_{(X/Y)'} \text{ für alle } \varphi \in (X/Y)'.
$$

Dies liefert:

$$
\|T_2\|_{L((X/Y)', X')} \leq 1
$$

und mit der Linearität von T_2 folgt dass T_2 stetig ist.
T_2 **surjektiv**: Seien $y' \in Y^\perp$. Setze

$$
\varphi(x + Y) := y'(x) \text{ für alle } x \in X.
$$

Demnach hängt φ nicht von der Wahl des Repräsentanten $x \in X$ in der Äquivalenzklasse $x + Y$ ab, also gilt für $x, z \in X$ mit $x + Y = z + Y$, dass $x - z \in Y$ ist und daher ist:

$$
0 = y'(0) = \varphi(Y) = \varphi(x - z + Y) = y'(x - z) = y'(x) - y'(z) = \varphi(x + Y) - \varphi(z + Y).
$$

Weiter ist φ linear (da y' linear ist) und es gilt:

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x + Y)| &= |y'(x)| = |y'(x) - y'(y)| = |y'(x - y)| \\
&\leq \|y'\|_{X'} \|x - y\|_X
\end{aligned}
$$

für alle $x \in X$ und $y \in Y$ (da $y'(y) = 0$ ist). Bilden wir nun das Infimum über alle $y \in Y$ folgt für alle $x \in X$:

$$
|\varphi(x + Y)| = \inf_{y \in Y} |\varphi(x + Y)| \leq \inf_{y \in Y} \|y'\|_{X'} \|x - y\|_X = \|y'\|_{X'} \|x\|_{X/Y},
$$

d.h. $\varphi \in (X/Y)'$ mit $T_2\varphi = \varphi \circ Q = y'$.
T_2 **isometrisch**: Seien $\varphi \in (X/Y)'$, $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ so, dass $\|x + Y\|_{X/Y} = 1$ ist. Dann existiert per Definition der

Quotientennorm ein $y \in Y$ so, dass $\|x - y\|_X \leq 1 + \varepsilon$. Setze $x_0 := x - y \in X$, so ist $x_0 + Y = x - y + Y = x + Y$. So gilt nach der Abschätzung im Abschnitt über die Wohl-definiertheit von T_2 gerade:

$$|\varphi\left(x + Y\right)| = |\varphi\left(x_0 + Y\right)| = |T_2(\varphi)\left(x_0\right)| \leq \|T_2(\varphi)\|_{X'} \|x_0\|_X \leq (1 + \varepsilon) \|T_2(\varphi)\|_{X'} .$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, erhalten wir für $\varepsilon \to 0^+$:

$$|\varphi(x + Y)| \leq \|T_2(\varphi)\|_{X'} \text{ für alle } x \in X \text{ mit } \|x + Y\|_{X/Y} = 1.$$

Also ist $\|\varphi\|_{(X/Y)'} \leq \|T_2(\varphi)\|_{X'}$. Nach dem Abschnitt über die Wohl-Definiertheit haben wir $\|T_2(\varphi)\|_{X'} \leq \|\varphi\|_{(X/Y)'}$, also gilt:

$$\|T_2(\varphi)\|_{X'} = \|\varphi\|_{(X/Y)'} .$$

Damit ist T_2 injektiv und isometrisch. $\square$