22.05.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Faltungsoperatoren)

Sei $k \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Zeigen Sie, dass der Operator $T\colon L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ definiert durch

$$Tf := k * f,\ f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$$

ein wohl-definierter, linearer und stetiger Operator ist und bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(T)$, sowie die Teilspektren $\sigma_p(T),\ \sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.

Aufgabe 2 (Fouriertransformation von Schwartzfunktionen)

Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

ein wohl-definierter Automorphismus ist.

Hinweis: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ konvergiert in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ genau dann, wenn es bezüglich der Familie der (Schwartz) Halbnormen konvergiert, d.h.

$$\rho_{\alpha,\beta}\left(f_n - f\right) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\beta \partial^\alpha \left(f_n - f\right)(x)\right| \to 0 \text{ falls } n \to \infty \text{ für alle Multiindizes } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

Aufgabe 3 (Analytische Fortsetzung der Fouriertransformation)

Seien $\alpha \in (0,\infty)$ und der Streifen $S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}\colon |\Im(z)| < \alpha\}$, sowie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Borel-messbare Funktion mit $f(\cdot)\mathrm{e}^{\alpha|\cdot|} \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Zeigen Sie, dass das Integral

$$I(z) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot x} f(x)\mathrm{d}x$$

für alle $z \in S_\alpha$ existiert.

(ii) Zeigen Sie, dass I eine holomorphe Fortsetzung von $\widehat{f}$ ist.

(iii) Sei nun $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ mit $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, die folgende Äquivalenz:

$$\operatorname{supp}\left(\widehat{f}\right) \text{ ist kompakt} \ \Leftrightarrow\ f \text{ ist konstant null.}$$