22.05.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

5. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Faltungsoperatoren)

Sei $k \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Zeigen Sie, dass der Operator $T\colon L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ definiert durch

$$Tf := k * f,\ f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$$

ein wohl-definierter, linearer und stetiger Operator ist und bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(T)$, sowie die Teilspektren $\sigma_p(T),\ \sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.

Lösung von Aufgabe 1

T **wohl-definiert**: Wegen $k \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ und $f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ ist das Faltungsprodukt $k * f$ stets im Lebesgueraum $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ nach der Faltungs-Ungleichung von Young.
T **linear**: Dies ist klar, da das Integral linear ist.
T **stetig**: Es gilt für alle $f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ nach der Faltungs-Ungleichung von Young:

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|k * f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|k\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Also folgt mit der Linearität von T:

$$T \in L\left(L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \text{ mit } \|T\|_{L(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|k\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Spektrum von T: Dafür setzen wir $S = \mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}\colon L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, so ist S linear und stetig. Weiter hat S die Darstellung:

$$Sf = \mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{F}\left[k * \mathcal{F}^{-1}(f)\right] = \widehat{k}f,$$

d.h. S ist ein Multiplikationsoperator und nach der Vorlesung ist $\widehat{k} \in BUC\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{k}(\xi) = 0$$

nach dem Riemann-Lebesgue Lemma. Also ist laut Übungsaufgaben:

$$\sigma(T) = \sigma(S) = \overline{\operatorname{ess\,range}\left(\widehat{k}\right)} = \overline{\operatorname{range}\left(\widehat{k}\right)} = \operatorname{range}\left(\widehat{k}\right) \cup \{0\},$$

da die Fouriertransformation $\mathcal{F}\colon L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ ein Isomorphismus ist.
Punktspektrum von T: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt für ein $f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$:

$$\begin{aligned}0 = \left(\lambda \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d)} - T\right) f \text{ in } L^2\left(\mathbb{R}^d\right) &\Leftrightarrow\ 0 = \mathcal{F}\left(\lambda \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d)} - T\right)\mathcal{F}^{-1}f = \left(\lambda \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \widehat{k}\right) f \text{ in } L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \\ &\Leftrightarrow\ \widehat{k}(x) = \lambda \text{ oder } f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

D.h. das Punktspektrum von T ist

$$\sigma_p(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \widehat{k} = \lambda \text{ auf einer Menge } U \subseteq \mathbb{R}^d \text{ mit } \mathcal{L}^d(U) > 0\right\},$$

denn in diesem Fall wähle eine Menge $V \subseteq U$ mit $\mathcal{L}^d(V) \in (0,\infty)$ und als Eigenfunktion $f = \chi_V \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{L}^d(V)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Stetiges Spektrum von T: Da $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_c(T)$ ist, sei o.B.d.A. $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \in \overline{\operatorname{range}\left(\widehat{k}\right)} = \sigma(T)$ mit $\lambda \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d)} - T$ injektiv (d.h. $\lambda \notin \sigma_p(T)$), so darf $\lambda \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d)} - T$ nicht surjektiv sein. So ist die Menge

$$N := \left\{x \in \mathbb{R}^d \colon \widehat{k} = \lambda\right\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

eine Lebesgue-Nullmenge. Weiter ist N abgeschlossen, denn für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}^d$ gilt mit der Stetigkeit von $\widehat{k}$:

$$\widehat{k}(x) = \widehat{k}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \widehat{k}\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

d.h. $x \in N$. Nun sei $g \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ beliebig, aber fest. Nach dem Lemma unten ist die Menge

$$D := \left\{\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) : \operatorname{supp}\left(\widehat{\varphi}\right) \subseteq \mathbb{R}^d \backslash N\right\} \subseteq L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$$

dicht in $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Also wählen wir eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ in $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Nun setzen wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n := \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{B_n(0)}(\cdot)\frac{1}{\lambda - \widehat{k}(\cdot)}\widehat{g}_n\right).$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, denn die Funktion $\chi_{B_n(0)}(\cdot)\frac{1}{\lambda-\widehat{k}(\cdot)}\widehat{g}_n \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ hat Träger

$$K := \operatorname{supp}\left(\chi_{B_n(0)}(\cdot)\frac{1}{\lambda - \widehat{k}(\cdot)}\widehat{g}_n\right) = B_n(0) \cap \operatorname{supp}\left(\widehat{g}_n\right) \subseteq \mathbb{R}^d \backslash N \text{ und ist kompakt,}$$

d.h. wegen der Stetigkeit von $\frac{1}{\lambda-\widehat{k}(\cdot)}$ auf $\mathbb{R}^d\backslash N$ ist diese Funktion auf K gleichmäßig stetig und so beschränkt, also $\frac{1}{\lambda-\widehat{k}(\cdot)}\chi_K(\cdot) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{B_n(0)}(\cdot)\frac{1}{\lambda - \widehat{k}(\cdot)}\widehat{g}_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \left\|\chi_K(\cdot)\chi_{B_n(0)}(\cdot)\frac{1}{\lambda - \widehat{k}(\cdot)}\widehat{g}_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \left\|\chi_K(\cdot)\chi_{B_n(0)}(\cdot)\frac{1}{\lambda - \widehat{k}(\cdot)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \left\|\widehat{g}_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \left\|\chi_K(\cdot)\chi_{B_n(0)}(\cdot)\frac{1}{\lambda - \widehat{k}(\cdot)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \left\|g_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty
\end{aligned}$$

laut Plancherel. Damit ist f_n in $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, da $\mathcal{F}^{-1}\colon L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ ist. Weiter gilt nach Plancherel:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\lambda \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d)} - T\right) f_n - g\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \left\|\left(\lambda - \widehat{k}\right)\widehat{f}_n - \widehat{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \left\|\chi_{B_n(0)}\widehat{g}_n - \left(\chi_{B_n(0)} + \chi_{B_n(0)^C}\right)\widehat{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \left\|\chi_{B_n(0)}\left(\widehat{g}_n - \widehat{g}\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\|\chi_{B_n(0)^C}\widehat{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \left\|\mathcal{F}\left(g_n - g\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\|\chi_{B_n(0)^C}\widehat{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \left\|g_n - g\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\|\chi_{B_n(0)^C}\widehat{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\to 0 + 0 = 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue wegen $\left|\chi_{B_n(0)^C}(x)\widehat{g}(x)\right|^2 \to 0$ für $n \to \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $\left|\chi_{B_n(0)^C}(x)\widehat{g}(x)\right|^2 \leq |\widehat{g}(x)|^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^d$, sowie $|\widehat{g}|^2 \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Damit ist

$$\overline{\operatorname{range}\left(\widehat{k}\right)} \subseteq \sigma_c(T) \subseteq \sigma(T) = \overline{\operatorname{range}\left(\widehat{k}\right)},$$

d.h.

$$\sigma_c(T) = \overline{\operatorname{range}\left(\lambda \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d)} - T\right)},$$

und daher

$$\sigma_r(T) = \sigma_p(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \widehat{k} = \lambda \text{ auf einer Menge } U \subseteq \mathbb{R}^d \text{ mit } \mathcal{L}^d(U) > 0\right\}.$$

$\square$

Lemma: (Dichtheit von D in $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$)
Sei $N \subseteq \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene Lebesgue-Nullmenge. Dann ist die Menge

$$D := \left\{\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) : \operatorname{supp}\left(\widehat{\varphi}\right) \subseteq \mathbb{R}^d \backslash N\right\} \subseteq L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$$

dicht in $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.
Beweis: O.B.d.A.: $N \neq \emptyset$ (sonst ist $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) = D$, was dicht ist in $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$).
Da $N^C = \mathbb{R}^d \backslash N$ offen ist, können wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ offene Mengen $A_n, B_n \subseteq \mathbb{R}^d$ finden mit $N \subseteq A_n \subseteq \overline{A_n} \subseteq B_n \subseteq \overline{B_n}$ und

$$0 < \operatorname{dist}\left(B_n^C, N\right) < \frac{1}{n}.$$

Wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine passende Abschneidefunktion $\eta_n \in C^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $\eta_n = 0$ auf A_n, $\eta_n = 1$ auf B_n^C und $\eta(x) \in [0,1]$ sonst. Sei nun $g \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. So ist $\widehat{g} \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ und wir können eine Folge $\left(h_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = \widehat{g}$ in $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ finden. Setze nun $f_k := \mathcal{F}^{-1}\left(h_k\right)$ zu $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Plancherel:

$$\left\|f_k - g\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\|\widehat{f_k} - \widehat{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\|h_k - \widehat{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Setze weiter:

$$g_{n,k} := \mathcal{F}^{-1}\left(\eta_n \widehat{f_k}\right) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) \text{ für } n,k \in \mathbb{N},$$

da $\widehat{f_k} \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ ist und damit ist $\eta_n \widehat{f_k} \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right) \subseteq \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ für alle $n,k \in \mathbb{N}$ und die Fouriertransformation ist auf $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ein Automorphismus (nach Aufgabe 2). Es gilt für $n,k \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{supp}\left(\widehat{g}_{n,k}\right) = \operatorname{supp}\left(\eta_n \widehat{f_k}\right) \subseteq A_n^C \subseteq \mathbb{R}^d \backslash N$$

nach Wahl der Abschneidefunktion η_n, d.h. $\left(g_{n,k}\right)_{n,k\in\mathbb{N}} \subseteq D$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle erst einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\|f_{k_0} - g\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es gilt für ein beliebiges $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $\operatorname{supp}\left(\widehat{f}\right)$ kompakt nach Plancherel:

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\eta_n \widehat{f}\right) - f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \left\|\eta_n \widehat{f} - \widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\|\left(\eta_n - 1\right)\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\to 0 \text{ für } n \to \infty\end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue, denn es ist $\left|\left(\eta_n(x) - 1\right)\widehat{f}(x)\right|^2 \leq 4\left|\widehat{f}(x)\right|^2$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\eta_n(x) - 1\right)\widehat{f}(x)\right|^2 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, sowie $4\left|\widehat{f}(x)\right|^2 \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, da $\widehat{f} \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ ist. Wähle nun auf Grund dieser Konvergenzeigenschaft einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\|g_{n_0,k_0} - f_{k_0}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demnach folgt:

$$\left\|g_{n_0,k_0} - g\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\|g_{n_0,k_0} - f_{k_0}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\|f_{k_0} - g\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dies liefert uns, dass die Menge D dicht ist in $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. $\square$

Aufgabe 2 (Fouriertransformation von Schwartzfunktionen)

Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

ein wohl-definierter Automorphismus ist.
Hinweis: Eine Folge $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ konvergiert in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ genau dann, wenn es bezüglich der Familie der (Schwartz) Halbnormen konvergiert, d.h.

$$\rho_{\alpha,\beta}\left(f_n - f\right) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|x^\beta \partial^\alpha \left(f_n - f\right)(x)\right| \to 0 \text{ falls } n \to \infty \text{ für alle Multiindizes } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

Lösung von Aufgabe 2

Wir zeigen erst folgendes Lemma:
Lemma: (Konvergenz in $\mathcal{S}$ liefert Konvergenz in L^p)
Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $p \in [1,\infty]$, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ und

$$\left\|\partial^\beta g\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_{p,d} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|\leq\left[\frac{d+1}{p}\right]+1} \rho_{\alpha,\beta}(g) \text{ für alle } g\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

für eine Konstante $C_{p,d} > 0$.
Beweis: Beachte für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$|x|^k \leq C_{d,k} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|=k} |x^\alpha| \text{ für alle } x\in\mathbb{R}^d.$$

Denn betrachten wir die Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty),\ x \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|=k} |x^\alpha|,$$

so ist h stetig und somit ist $h\left(S^{d-1}\right)$ kompakt, da zusätzlich die Menge

$$S^{d-1} := \left\{x\in\mathbb{R}^d\colon |x| = 1\right\} = \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^d$$

kompakt ist. Damit nimmt die Bildmenge $h\left(S^{d-1}\right)$ Minimum und Maximum an, setze daher

$$\kappa_{k,d} := \min h\left(S^{d-1}\right) \in (0,\infty),$$

da $h > 0$ auf S^{d-1} ($h(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$). Damit folgt nun für beliebiges $x\in\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|=k} |x^\alpha| = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|=k} \left|\left(\frac{x}{|x|}|x|\right)^\alpha\right| &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|=k} \left|\left(\frac{x}{|x|}\right)^\alpha\right| |x|^k \geq \kappa_{k,d}|x|^k \\ \Leftrightarrow\; |x|^k \leq \frac{1}{\kappa_{k,d}} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|=k} |x^\alpha| &=: C_{d,k} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|=k} |x^\alpha|.\end{aligned}$$

Im Fall $x = 0$ gibt es nichts zu zeigen.
Der Fall $p = \infty$ ist "klar", denn es ist:

$$\left\|\partial^\beta g\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \rho_{0,\beta}(g) \leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|\leq 1} \rho_{\alpha,\beta}(g) \text{ für alle } g\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

mit $C_{\infty,d} = 1 > 0$.
Seien nun $p\in[1,\infty)$ und $g\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Dann gilt per Definiton der Schwartz-Halbnormen:

$$\begin{aligned}\left\|\partial^\beta g\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial^\beta g(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{|x|<1} \left|\partial^\beta g(x)\right|^p \mathrm{d}x + \int_{|x|>1} \left|\partial^\beta g(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{|x|<1} \left\|\partial^\beta g\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^p \mathrm{d}x + \int_{|x|>1} |x|^{d+1} \left|\partial^\beta g(x)\right|^p |x|^{-(d+1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\mathcal{L}^d\left(B_1(0)\right) \left\|\partial^\beta g\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^p + \sup_{|x|>1}\left(|x|^{d+1}\left|\partial^\beta g(x)\right|^p\right) \int_{|x|>1} |x|^{-(d+1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \max\left\{\mathcal{L}^d\left(B_1(0)\right),\, \int_{|x|>1} |x|^{-(d+1)}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \left(\left\|\partial^\beta g\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x|^{\left[\frac{d+1}{p}\right]+1} \left|\partial^\beta g(x)\right|\right) \\ &\leq \max\left\{\mathcal{L}^d\left(B_1(0)\right),\, \int_{|x|>1} |x|^{-(d+1)}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \left(\left\|\partial^\beta g\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} C_{d,\left[\frac{d+1}{p}\right]+1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|=\left[\frac{d+1}{p}\right]+1} |x^\alpha| \left|\partial^\beta g(x)\right|\right) \\ &\leq \max\left\{\mathcal{L}^d\left(B_1(0)\right),\, \int_{|x|>1} |x|^{-(d+1)}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \left(\rho_{0,\beta}(g) + C_{d,\left[\frac{d+1}{p}\right]+1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon\, |\alpha|=\left[\frac{d+1}{p}\right]+1} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha| \left|\partial^\beta g(x)\right|\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max\left\{\mathcal{L}^d\left(B_1(0)\right), \int_{|x|>1}|x|^{-(d+1)}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left(\rho_{0,\beta}(g)+C_{d,\left[\frac{d+1}{p}\right]+1}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon |\alpha|=\left[\frac{d+1}{p}\right]+1}\rho_{\alpha,\beta}(g)\right)\\
&\leq \max\left\{\mathcal{L}^d\left(B_1(0)\right), \int_{|x|>1}|x|^{-(d+1)}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\max\left\{1, C_{d,\left[\frac{d+1}{p}\right]+1}\right\}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon |\alpha|\leq\left[\frac{d+1}{p}\right]+1}\rho_{\alpha,\beta}(g)\\
&= C_{p,d}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon |\alpha|\leq\left[\frac{d+1}{p}\right]+1}\rho_{\alpha,\beta}(g).
\end{aligned}
$$

Ist nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $f\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, so folgt nach der obigen Abschätzung für alle $p\in[1,\infty]$ und $\beta=0$:

$$
\|f_n-f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\leq C_{p,d}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\colon |\alpha|\leq\left[\frac{d+1}{p}\right]+1}\rho_{\alpha,0}\left(f_n-f\right)\to 0 \text{ für } n\to\infty,
$$

da es eine Summe mit endlich vielen Summanden ist, d.h.

$$
\lim_{n\to\infty}f_n=f \text{ in } L^p\left(\mathbb{R}^d\right).
$$

□

Nun zeigen wir, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F}\colon\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)\to\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ein wohl-definierter Automorphismus ist.
Wohl-Definiertheit: Seien $f\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)\subseteq L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ sowie $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d$ beliebig, dann gilt nach Vorlesung:

$$
\begin{aligned}
\left\|(\cdot)^\alpha\left(\partial^\beta\widehat{f}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}&=\frac{(2\pi)^{|\beta|}}{(2\pi)^{|\alpha|}}\left\|\mathcal{F}\left(\partial^\alpha\left((\cdot)^\beta f\right)\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq\frac{(2\pi)^{|\beta|}}{(2\pi)^{|\alpha|}}\left\|\partial^\alpha\left((\cdot)^\beta f\right)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}<\infty,
\end{aligned}
$$

da das Produkt von Polynomen mit Schwartz-Funktionen und Ableitungen von Schwartz-Funktionen wieder Schwartz-Funktionen sind, also insbesondere in $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, d.h. $\widehat{f}\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
Linearität: Ist klar, da das Integral linear ist.
Stetigkeit: Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right), f\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Dann gilt für alle $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d$ nach der Abschätzung bei der Wohl-Definiertheit und dem obigen Lemma im Fall $p=1$:

$$
\begin{aligned}
\rho_{\alpha,\beta}\left(\widehat{f_n}-\widehat{f}\right)&\leq\frac{(2\pi)^{|\beta|}}{(2\pi)^{|\alpha|}}\left\|\partial^\alpha\left((\cdot)^\beta\left(f_n-f\right)\right)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\
&\leq C_{1,d}\frac{(2\pi)^{|\beta|}}{(2\pi)^{|\alpha|}}\sum_{\widetilde{\alpha}\in\mathbb{N}_0^d\colon |\widetilde{\alpha}|\leq d+2}\rho_{\widetilde{\alpha},\alpha}\left((\cdot)^\beta\left(f_n-f\right)\right)\\
&\leq C_{1,d}\frac{(2\pi)^{|\beta|}}{(2\pi)^{|\alpha|}}\sum_{\widetilde{\alpha}\in\mathbb{N}_0^d\colon |\widetilde{\alpha}|\leq d+2}\rho_{\widetilde{\alpha}+\beta,\alpha}\left(f_n-f\right)\to 0 \text{ für } n\to\infty,
\end{aligned}
$$

da die Summe nur endlich viele Summanden besitzt. Dies bedeutet, dass die Fouriertransformation stetig ist auf $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
Bijektivität: Die Fouriertransformation $\mathcal{F}\colon\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)\to\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ist bijektiv, da die Inverse

$$
\mathcal{F}^{-1}(f)(x)=\widehat{f}(-x)
$$

für alle $f\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ und $x\in\mathbb{R}^d$ ist mit

$$
\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f=\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f=f.
$$

(Dies wurde bereits in der Vorlesung nachgerechnet/ nachgewiesen). So ist $\mathcal{F}\colon\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)\to\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ein Automorphismus. □

Aufgabe 3 (Analytische Fortsetzung der Fouriertransformation)

Seien $\alpha\in(0,\infty)$ und der Streifen $S_\alpha:=\{z\in\mathbb{C}\colon|\Im(z)|<\alpha\}$, sowie $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine Borel-messbare Funktion mit $f(\cdot)\mathrm{e}^{\alpha|\cdot|}\in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Zeigen Sie, dass das Integral

$$
I(z):=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot x}f(x)\mathrm{d}x
$$

für alle $z\in S_\alpha$ existiert.

(ii) Zeigen Sie, dass I eine holomorphe Fortsetzung von $\widehat{f}$ ist.

(iii) Sei nun $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ mit $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, die folgende Äquivalenz:

$$\operatorname{supp}\left(\widehat{f}\right) \text{ ist kompakt } \Leftrightarrow f \text{ ist konstant null.}$$

Lösung von Aufgabe 3

(i) Es gilt für alle $z \in S_\alpha$ und allen $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\right| &= \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Re(z)+\mathrm{i}\Im(z))x}\right| |f(x)| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Re(z)x}\right| \left|\mathrm{e}^{\Im(z)x}\right| |f(x)| = \left|\mathrm{e}^{\Im(z)x}\right| |f(x)| \\ &\leq \mathrm{e}^{|\Im(z)||x|} |f(x)| \leq \mathrm{e}^{\alpha|x|} |f(x)| .\end{aligned}$$

Damit folgt die Wohl-Definiertheit von $I\colon S_\alpha \to \mathbb{C}$ wegen

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\right| \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\alpha|x|} |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty,$$

da $\mathrm{e}^{\alpha|\cdot|} f \in L^1(\mathbb{R})$ ist.

(ii) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x)| = 1 \cdot |f(x)| \leq \mathrm{e}^{\alpha|x|} |f(x)| ,$$

d.h. $f \in L^1(\mathbb{R})$, da $\mathrm{e}^{\alpha|\cdot|} f \in L^1(\mathbb{R})$ ist. Für $z_\xi := 2\pi\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, ist $\Im(z_\xi) = 0$, d.h. $z_\xi \in S_\alpha$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und

$$I(z_\xi) = I(2\pi\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x} f(x)\mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi).$$

Damit ist I eine Fortsetzung von $\widehat{f}$ auf S_α. Sei nun $z_0 \in S_\alpha$ beliebig. Wähle $\varepsilon \in (0, \alpha - |\Im(z_0)|)$, da $|\Im(z_0)| < \alpha$ ist. Ist nun $z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_0) \subseteq \mathbb{C}$, so gilt

$$|\Im(z)| = |\Im(z - z_0) + \Im(z_0)| \leq |\Im(z - z_0)| + |\Im(z_0)| \leq |z - z_0| + |\Im(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\Im(z_0)| < \alpha - |\Im(z_0)| + |\Im(z_0)| = \alpha,$$

d.h. $z \in S_\alpha$ und damit auch $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_0) \subseteq S_\alpha$, damit ist die Menge $S_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ offen. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, finden wir eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ so, dass

$$|x| \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{2}|x|} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt. Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_\alpha$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $z_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_n x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x}}{z_n - z_0} = -\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x}.$$

Weiter haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_n x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x}}{z_n - z_0} f(x)\right| &= \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_n - z_0)x} - 1\right)(z_n - z_0)^{-1} f(x)\right| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}x)^k}{k!} (z_n - z_0)^k - 1\right)(z_n - z_0)^{-1} f(x)\right| \\ &= \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x} \sum_{k=1} \infty \frac{(-\mathrm{i}x)^k}{k!} (z_n - z_0)^{k-1} f(x)\right| = \left|-\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}x)^l}{(l+1)\cdot l!} (z_n - z_0)^l f(x)\right| \\ &= \left|-\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_n - z_0)x} f(x)\right| \\ &\leq |x| \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x}\right| \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_n - z_0)x}\right| |f(x)| \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{2}|x|}\mathrm{e}^{|\Im(z_0)||x|}\mathrm{e}^{|z_n - z_0||x|} |f(x)| \\ &\leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{\left(|\Im(z_0)| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)|x|} |f(x)| = C_\varepsilon \mathrm{e}^{(|\Im(z_0)| + \varepsilon)|x|} |f(x)| \\ &\leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{(|\Im(z_0)| + \alpha - |\Im(z_0)|)|x|} |f(x)| = C_\varepsilon \mathrm{e}^{\alpha|x|} |f(x)| =: h(x)\end{aligned}$$

und $h \in L^1(\mathbb{R})$. Damit folgt mit dem Satz von Lebesgue:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{I(z_n) - I(z_0)}{z_n - z_0} &= \lim_{n\to\infty,\ n\geq n_0} \frac{I(z_n) - I(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_{n\to\infty,\ n\geq n_0} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_n x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x}}{z_n - z_0}\right) f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty,\ n\geq n_0} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_n x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x}}{z_n - z_0}\right) f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0 x} f(x)\mathrm{d}x,$$

d.h. I ist komplex differenzierbar mit

$$I'(z) = -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}zx} f(x)\mathrm{d}x \text{ für alle } z \in S_\alpha.$$

Also ist nach der Funktionentheorie die Funktion I holomorph auf S_α. Zusammengefasst ist I eine holomorphe Fortsetzung von der Fouriertransformierten $\widehat{f}$.
(iii) Ist f konstant null, so ist auch die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ konstant null. Daher sei nun $f \in C_c^0(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ mit $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ und $K := \operatorname{supp}\left(\widehat{f}\right) \subseteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt für passende $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Der Träger ist wohl-definiert, da laut Vorlesung die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ insbesondere stetig ist. Da die Funktion f selber kompakten Träger hat, gilt:

$$\mathrm{e}^{\beta|\cdot|} f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ für alle } \beta > 0.$$

Also können wir die Fouriertransformierte $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zu einer holomorphen Funktion $J\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. fortsetzen. Wähle eine Folge mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (-\infty, a)$ mit einem Häufungspunkt $x_0 \in (-\infty, a)$. O.B.d.A. konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0 für $n \to \infty$, ansonsten wähle passende Teilfolge. Dann gilt: $J(x_n) = \widehat{f}(x_n) = 0 = \widehat{f}(x_0) = J(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Identitätssatz aus der Funktionentheorie folgt: J ist konstant null, also ist auch $\widehat{f}$ konstant null. Wegen $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ können wir zuücktransformieren und erhalten, dass die Funktion f konstant null ist. Dies war zu zeigen. $\square$