29.05.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Spektraltheorie

6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (T Fredholm-Operator so auch T')

Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume.

(i) Zeigen Sie, dass für einen linearen, stetigen Operator $T \in L(X,Y)$ mit abgeschlossenem Bild $\operatorname{range}(T) \subseteq Y$ gilt: $\operatorname{range}(T') \subseteq X'$ ist abgeschlossen, $\ker(T') \cong (\operatorname{coker}(T))'$, sowie $\operatorname{coker}(T') \cong (\ker(T))'$.

(ii) Folgern Sie aus (i), dass für einen Fredholm-Operator $T \in \Phi(X,Y)$ folgt: $T' \in \Phi(Y', X')$ mit $\operatorname{ind}(T) = -\operatorname{ind}(T')$.

(iii) Beweisen Sie, dass für einen linearen, stetigen Operator $T \in L(X,Y)$ mit abgeschlossenem Bild $\operatorname{range}(T) \subseteq Y$ und $y \in Y$ die Äquivalenz gilt:

$$Tx = y \text{ ist lösbar } \Leftrightarrow \psi(y) = 0 \text{ für alle } \psi \in \ker(T').$$

Aufgabe 2 (Standardbeispiele)

Seien $p \in [1,\infty]$ beliebig und $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume. Beweisen Sie die Standardbeispiele für Fredholm-Operatoren:

(i) Ist $J \in L(X,Y)$ ein Isomorphismus, so ist J ein Fredholm-Operator mit $\operatorname{ind}(J) = 0$.

(ii) Sei $L\colon l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N}),\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ der Linksshift-Operator. Zeigen Sie, dass L ein Fredholm-Operator ist mit $\operatorname{ind}(L) = +1$.

(iii) Sei $R\colon l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N}),\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Fredholm-Operator ist mit $\operatorname{ind}(R) = -1$.