29.05.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

6. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (T Fredholm-Operator so auch T')

Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume.

(i) Zeigen Sie, dass für einen linearen, stetigen Operator $T \in L(X,Y)$ mit abgeschlossenem Bild range$(T) \subseteq Y$ gilt: range$(T') \subseteq X'$ ist abgeschlossen, $\ker(T') \cong (\operatorname{coker}(T))'$, sowie $\operatorname{coker}(T') \cong (\ker(T))'$.

(ii) Folgern Sie aus (i), dass für einen Fredholm-Operator $T \in \Phi(X,Y)$ folgt: $T' \in \Phi(Y', X')$ mit $\operatorname{ind}(T) = -\operatorname{ind}(T')$.

(iii) Beweisen Sie, dass für einen linearen, stetigen Operator $T \in L(X,Y)$ mit abgeschlossenem Bild range$(T) \subseteq Y$ und $y \in Y$ die Äquivalenz gilt:

$$Tx = y \text{ ist lösbar } \Leftrightarrow \psi(y) = 0 \text{ für alle } \psi \in \ker(T').$$

Lösung von Aufgabe 1

(i) Nach Funktionalanalysis ist coker $= Y/\operatorname{range}(T)$ bezüglich der Norm

$$\|[y]\| := \inf_{x \in X} \|y + Tx\|_Y$$

ein Banachraum. Definiere die Projektion

$$\pi\colon Y \to Y/\operatorname{range}(T),\ y \mapsto [y]$$

und das duale dazu

$$\pi'\colon (\operatorname{coker}(T))' \to Y'.$$

Schritt 1.: Zeige $\pi'\colon (\operatorname{coker}(T))' \to \ker(T') \subseteq Y'$ ist ein Isomorphismus.
Wohl-Definiertheit: Es gilt:

$$T' \circ \pi' = (\pi \circ T)' = 0,$$

d.h. π' ist wohl-definiert.
Weiter ist per Definition des dualen Operators π' linear und stetig/ beschränkt.
Bijektivität: Setze

$$\rho\colon \ker(T') \to (\operatorname{coker}(T))',\ (\rho\psi)[y] := \psi(y) \text{ für } \psi \in \ker(T'), y \in Y.$$

Die Abbildung $\rho\psi$ ist wohl-definiert und linear (klar), denn es $\rho\psi[Tx] = T'(\psi x) = 0$ und

$$|\rho\psi[y]| = |\psi(y + TX)| \leq \|\psi\|_{Y'} + \|y + Tx\|_Y$$

für alle $x \in X$ und $\psi \in \ker(T')$. Damit ergibt sich durch Bilden des Infimums über x auf beiden Seiten:

$$|\rho\psi[y]| \leq \|\psi\|_{Y'} \|[y]\|,$$

d.h. $\rho\psi \in (\operatorname{coker}(T))'$. Aus

$$(\pi'(\rho\psi)(y) = (\rho\psi)(\pi y) = \rho\psi[y] = \psi(y) \text{ für alle } \psi \in \ker(T'), y \in Y$$

folgt, dass $\pi' \circ \rho = \operatorname{Id}_{\ker(T')}$ ist. Aus

$$(\rho\pi' g)[y] = (\pi' g)(y) = g(\pi y) = g[y] \text{ für alle } g \in (\operatorname{coker}(T))', y \in Y$$

folgt, dass $\rho \circ \pi' = \operatorname{Id}_{(\operatorname{coker}(T))'}$ ist. Damit ist π' bijektiv bzw. ein Isomorphismus und es ist $(\operatorname{coker}(T))' \cong \ker(T')$.
Schritt 2. range$(T') \subseteq X'$ **ist abgeschlossen:** Betrachte

$$\sigma\colon X' \to \ker(T)',\ \sigma\varphi = \varphi|_{\ker(T)}.$$

Dann ist σ linear und stetig mit $\|\sigma\|_{L(X',(\ker(T))')} \leq 1$.
Zu zeigen: $\operatorname{range}(T') = \ker(\sigma)$:
"$\subseteq$": Es folgt aus

$$\sigma(T'\psi) = \sigma(\psi \circ T) = (\psi \circ T)|_{\ker(T)} = 0 \text{ für alle } \psi \in Y',$$

dass $\operatorname{range}(T') \subseteq \ker(\sigma)$ gilt.
"$\supseteq$": Definiere dazu

$$\widetilde{T}\colon X/\ker(T) \to \operatorname{range}(T),\ \widetilde{T}[x] = Tx \text{ für } x \in X.$$

Damit ist nach dem Homomorphiesatz die Abbildung $\widetilde{T}$ wohl-definiert, linear und beschränkt/ stetig, sowie bijektiv. Also existiert eine Abbildung $S \in L(\operatorname{range}(T), X/\ker(T))$ mit $S \circ \widetilde{T} = \operatorname{Id}_{X/\ker(T)}$. Sei $\varphi \in \ker(\sigma) \subseteq X'$ und definiere

$$\widetilde{\varphi} \in (X/\ker(T))' \text{ durch } \widetilde{\varphi}[x] = \varphi(x) \text{ für } x \in X.$$

Setze $\psi := \widetilde{\varphi} \circ S$. Da $\operatorname{range}(T) \subseteq Y$ abgeschlossen ist, setze ψ durch $\widetilde{\psi} \in Y'$ fort (per Satz von Hahn-Banach). Damit haben wir

$$\left(T'\widetilde{\psi}\right)(x) = \widetilde{\psi}(Tx) = \psi(Tx) = \left(\widetilde{\psi} \circ S \circ \widetilde{T}\right)[x] = \widetilde{\varphi}[x] = \varphi(x) \text{ für alle } x \in X,$$

woraus wir $\ker(\sigma) \subseteq \operatorname{range}(T')$ erhalten. Insgesamt ergibt sich so

$$\operatorname{range}(T') = \ker(\sigma) \subseteq X' \text{ abgeschlossen.}$$

Schritt 3. $\operatorname{coker}(T') \cong (\ker(T))'$: Setze hierzu

$$\widetilde{\sigma}\colon X'/\operatorname{range}(T') \to (\ker(T))',\ \widetilde{\sigma}[\varphi] := \varphi|_{\ker(T)} = \sigma(\varphi) \text{ für } \varphi \in X'.$$

So ist $\widetilde{\sigma}$ wohl-definiert, linear, stetig und injektiv.
$\widetilde{\sigma}$ *surjektiv*: Sei $\lambda \in (\ker(T))'$ beliebig. Setze λ zu einem Funktional $\Lambda \in X'$ (per Satz von Hahn-Banach, $\ker(T) \subseteq X$ ist abgeschlossen) fort. Damit ist

$$\widetilde{\sigma}[\Lambda] = \Lambda|_{\ker(T)} = \lambda.$$

Also ist $\widetilde{\sigma}$ surjektiv und damit ist $\widetilde{\sigma}$ ein Isomorphismus. Also gilt:

$$\operatorname{coker}(T') \cong (\ker(T))'.$$

$\square$

(ii) Sei $T \in \Phi(X,Y)$ beliebig. Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum gilt nach der Linearen Algebra:

$$\dim(V) = \dim(V').$$

So folgt nach (i) und da isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension besitzen:

$$\begin{aligned}
\dim(\ker(T')) &= \dim((\operatorname{coker}(T))') = \dim(\operatorname{coker}(T)) =: m < \infty,\\
\dim(\operatorname{coker}(T')) &= \dim((\ker(T))') = \dim(\ker(T)) =: n < \infty,\\
\operatorname{range}(T') &\subseteq X' \text{ abgeschlossen.}
\end{aligned}$$

So ist $T' \in \Phi(Y', X')$ ein Fredholm-Operator mit Index

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(T') &= \dim(\ker(T')) - \dim(\operatorname{coker}(T'))\\
&= m - n = \dim(\operatorname{coker}(T)) - \dim(\ker(T))\\
&= -(\dim(\ker(T)) - \dim(\operatorname{coker}(T))) = -(n-m) = -\operatorname{ind}(T).
\end{aligned}$$

$\square$

(iii) Sei $y \in Y$. Dann gilt die folgende Äquivalenz:

$$y \in \operatorname{range}(T) \ \Leftrightarrow\ \pi(y) = [y] = 0 \ \Leftrightarrow\ g[y] = 0 \text{ für alle } g \in (\operatorname{coker}(T))' \ \Leftrightarrow\ \psi(y) = (\rho\psi)[y] = 0 \text{ für alle } \psi \in \ker(T').$$

$\square$

(Die Abbildung π und ρ sind die aus Teil (i).)

Aufgabe 2 (Standardbeispiele)

Seien $p \in [1,\infty]$ beliebig und $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume. Beweisen Sie die Standardbeispiele für Fredholm-Operatoren:

(i) Ist $J \in L(X,Y)$ ein Isomorphismus, so ist J ein Fredholm-Operator mit $\operatorname{ind}(J) = 0$.

(ii) Sei $L\colon l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N}),\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ der Linksshift-Operator. Zeigen Sie, dass L ein Fredholm-Operator ist mit $\operatorname{ind}(L) = +1$.

(iii) Sei $R\colon l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N}),\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ der Rechtsshift-Operator. Zeigen Sie, dass R ein Fredholm-Operator ist mit $\operatorname{ind}(R) = -1$.

Lösung von Aufgabe 2

(i) Es ist $\operatorname{range}(J) = J(X) = Y \subseteq Y$ abgeschlossen, da J insbesondere surjektiv ist, daher ist $\operatorname{coker}(J) = \{[0]\}$. Weiter ist $\ker(J) = \{0\}$, da J insbesondere injektiv ist. Also sind $\dim(\ker(J)) = 0 = \dim(\operatorname{coker}(J)) < \infty$ und daher ist $J \in \Phi(X,Y)$ ein Fredholm-Operator mit

$$\operatorname{ind}(J) = \dim(\ker(J)) - \dim(\operatorname{coker}(J)) = 0 - 0 = 0.$$

$\square$

(ii) Es ist

$$\operatorname{range}(L) = l^p(\mathbb{N}) \subseteq L^p(\mathbb{N}) \text{ abgeschlossen,}$$

da L surjektiv ist, also ist $\operatorname{coker}(L) = \{0\}$. Weiter ist

$$\ker(L) = \operatorname{lin}(1, 0, \dots).$$

Also haben wir

$$\dim(\ker(L)) = 1 < \infty \text{ und } \dim(\operatorname{coker}(L)) = 0 < \infty,$$

daher ist $L \in \Phi\left(l^p(\mathbb{N}), l^p(\mathbb{N})\right)$ ein Fredholm-Operator mit

$$\operatorname{ind}(L) = \dim(\ker(L)) - \dim(\operatorname{coker}(L)) = 1 - 0 = 1.$$

$\square$

(iii) Es ist

$$\operatorname{range}(R) = \{x \in l^p(\mathbb{N})\colon x_1 = 0\} \subseteq l^p(\mathbb{N}) \text{ abgeschlossen,}$$

also ist

$$\operatorname{coker}(R) = l^p(\mathbb{N}) / \operatorname{range}(R) = \operatorname{lin}\left[(1, 0, \dots)\right].$$

Weiter ist

$$\ker(R) = \{0\},$$

da R injektiv ist. Damit ist nun

$$\dim(\ker(R)) = 0 < \infty \text{ und } \dim(\operatorname{coker}(R)) = 1 < \infty,$$

daher ist nun $R \in \Phi\left(l^p(\mathbb{N}), l^p(\mathbb{N})\right)$ ein Fredholm-Operator mit

$$\operatorname{ind}(R) = \dim(\ker(R)) - \dim(\operatorname{coker}(R)) = 0 - 1 = -1.$$

$\square$