06.06.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Zum essentiellen Spektrum σ_{ess})

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ ein linearer, abgeschlossener Operator, sowie $K \in K\left((D(A), \|\cdot\|_A), X\right)$ ein linearer, kompakter Operator. Zeigen Sie zuerst, dass die beiden Banachräume $(D(A), \|\cdot\|_A)$ und $\left(D(A+K), \|\cdot\|_{A+K}\right)$ isomorph sind zueinander und beweisen Sie

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(A+K).$$

Aufgabe 2 (Fredholm-Alternative für Hille-Tamarkin-Operatoren)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in (1, \infty)$, $X = L^p((\Omega, \mu), \mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, sowie $k\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ μ-messbar mit

$$\|k\|_{p,q} := \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)|^q \mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

wobei $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Setze $T_k\colon X \to X$ durch

$$T_k f(x) = \int_\Omega k(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y) \text{ für } f \in X, x \in \Omega.$$

Zeigen Sie:

(i) T_k ist ein wohl-definierter, linearer, stetiger und kompakter Operator.

(ii) Betrachten wir nun zu einem $g \in X$ folgendes Problem:

$$(*) \qquad (\lambda \mathrm{Id}_X - T_k) f = g.$$

Zeigen Sie, dass eine der folgenden zwei Alternativen gilt:

(1) $(*)$ hat eine eindeutige Lösung $f \in X$.

(2) Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in L^q(\Omega, \mu)$ so, dass $(*)$ genau dann eine Lösung hat, falls

$$\int_\Omega g(x) g_i(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

In diesem Fall ist der Lösungsraum n-dimensional.

Aufgabe 3 (Anwendung der Fredholm-Alternative)

Sei $X = L^2(0, \infty)$. Wir definieren den Integraloperator $T\colon X \to X$ durch

$$Tf(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(y) \mathrm{d}y \text{ für } f \in X, x \in (0, \infty).$$

Zeigen Sie:

(i) T ist ein wohl-definierter, linearer und stetiger Operator.

(ii) Zeigen Sie, dass T nicht kompakt sein kann.