06.06.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Spektraltheorie

7. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Zum essentiellen Spektrum σ_{ess})

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ ein linearer, abgeschlossener Operator, sowie $K \in K\left((D(A), \|\cdot\|_A), X\right)$ ein linearer, kompakter Operator. Zeigen Sie zuerst, dass die beiden Banachräume $(D(A), \|\cdot\|_A)$ und $\left(D(A+K), \|\cdot\|_{A+K}\right)$ isomorph sind zueinander und beweisen Sie

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(A+K).$$

Lösung von Aufgabe 1

Es gilt, da K beschränkt ist:

$$D(A+K) = D(A).$$

Daher gilt für alle $x \in D(A)$:

$$\begin{aligned}
\|x\|_{A+K} &= \|x\|_X + \|(A+K)x\|_X = \|x\|_X + \|Ax + Kx\|_X \le \|x\|_X + \|Ax\|_X + \|Kx\|_X \\
&\le \|x\|_A + \|K\|_{L(D(A),X)} \|x\|_A \\
&\le \left(1 + \|K\|_{L(D(A),X)}\right) \|x\|_A .
\end{aligned}$$

Für die andere Implikation nehmen wir an, wir würden zu jedem $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ ein Element $x_n \in D(A)$ finden mit

$$1 = \|x_n\|_A > n \|x_n\|_{A+K} .$$

Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{\ge 2}}$ somit in $(D(A), \|\cdot\|_A)$ beschränkt ist (durch 1), finden wir mit der Kompaktheit von K eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{\ge 2}}$ und ein Element $y \in X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} Kx_{n_k} = y$ in X. Die Annahme liefert nun für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n_k} > \|x_{n_k}\|_{A+K} = \|x_{n_k}\|_X + \|(A+K)x_{n_k}\|_X \ge \|x_{n_k}\|_X \ge 0,$$

bzw.

$$\frac{1}{n_k} > \|x_{n_k}\|_{A+K} = \|x_{n_k}\|_X + \|(A+K)x_{n_k}\|_X \ge \|(A+K)x_{n_k}\|_X \ge 0.$$

Also wissen wir nun, dass $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} (A+K)x_{n_k} = 0$ in X ist und daher auch

$$\lim_{k\to\infty} \|Ax_{n_k}\|_X = \lim_{k\to\infty} \left(\|Ax_{n_k}\|_X + \|x_{n_k}\|_X - \|x_{n_k}\|_X\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\|Ax_{n_k}\|_X - \|x_{n_k}\|_X\right) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \|x_{n_k}\|_X\right) = 1 - 0 = 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (Ax_{n_k} + Kx_{n_k} - Kx_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} ((A+K)x_{n_k} - Kx_{n_k}) = 0 - y = -y \text{ in } X.$$

Da der Operator A abgeschlossen ist, folgt nun $0 = \lim\limits_{k\to\infty} Ax_{n_k} = -y$ in X, d.h. $y = 0$, aber es muss gelten:

$$0 = \|-y\|_X = \lim_{k\to\infty} \|Ax_{n_k}\|_X = 1,$$

was ein Widerspruch ist. Damit war die Annahme falsch und es existiert eine Konstante $C_K > 0$ mit

$$\|x\|_A \le C_K \|x\|_{A+K} \le C_K \left(1 + \|K\|_{L(D(A),X)}\right) \|x\|_A =: \widetilde{C}_K \|x\|_A$$

für alle $x \in D(A) = D(A+K)$. Dies bedeutet, dass die Banachräume $(D(A), \|\cdot\|_A)$ und $\left(D(A+K), \|\cdot\|_{A+K}\right)$ isomorph zueinander sind mit dem Isomorphismus

$$J\colon (D(A), \|\cdot\|_A) \to \left(D(A+K), \|\cdot\|_{A+K}\right),\ x \mapsto x.$$

Zur Gleichheit der essentiellen Spektren: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt die Äquivalenz:

$$\begin{aligned}\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A) \;\Leftrightarrow\; \lambda \mathrm{Id}_X - A \in \Phi(D(A), X) \;\Leftrightarrow\; \lambda \mathrm{Id}_X - A - K = \lambda \mathrm{Id}_X - (A+K) \in \Phi(D(A), X)\\ \Leftrightarrow\; \lambda \mathrm{Id}_X - (A+K) \in \Phi(D(A+K), X) \;\Leftrightarrow\; \lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A+K),\end{aligned}$$

d.h.

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A)^C = \sigma_{\mathrm{ess}}(A+K)^C \;\Leftrightarrow\; \sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A+K).$$

□

Aufgabe 2 (Fredholm-Alternative für Hille-Tamarkin-Operatoren)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in (1, \infty)$, $X = L^p((\Omega, \mu), \mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, sowie $k\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ μ-messbar mit

$$\|k\|_{p,q} := \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)|^q \mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

wobei $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Setze $T_k\colon X \to X$ durch

$$T_k f(x) = \int_\Omega k(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y) \text{ für } f \in X, x \in \Omega.$$

Zeigen Sie:

(i) T_k ist ein wohl-definierter, linearer, stetiger und kompakter Operator.

(ii) Betrachten wir nun zu einem $g \in X$ folgendes Problem:

$$(*) \qquad (\lambda \mathrm{Id}_X - T_k) f = g.$$

Zeigen Sie, dass eine der folgenden zwei Alternativen gilt:

(1) $(*)$ hat eine eindeutige Lösung $f \in X$.

(2) Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in L^q(\Omega, \mu)$ so, dass $(*)$ genau dann eine Lösung hat, falls

$$\int_\Omega g(x) g_i(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

In diesem Fall ist der Lösungsraum n-dimensional.

Lösung von Aufgabe 2

(i) T_k **ist wohl-definiert**: Es gilt für alle $f \in X = L^p(\Omega, \mu)$ nach der Hölder-Ungleichung mit Paar (p, q):

$$\begin{aligned}\|T_k f\|_{L^p(\Omega,\mu)} &= \left(\int_\Omega |T_k f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega \left| \int_\Omega k(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y) \right|^p \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y) f(y)| \,\mathrm{d}\mu(y) \right)^p \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega \left(|k(x,y)|^q \mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega |f(y)|^p \mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{p}{p}} \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)| \mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f(y)|^p \mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \|k\|_{p,q} \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} < \infty.\end{aligned}$$

T_k **ist linear**: Dies ist klar, da das Integral linear ist.
T_k **ist stetig**: Da T_k linear ist und mit der Abschätzung im Teil der Wohl-Definiertheit T_k beschränkt ist, folgt:

$$T_k \in L(X) \text{ mit } \|T_k\|_{L(X)} \le \|k\|_{p,q}.$$

T_k **ist kompakt**: Wähle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $\|f_n\|_{L^p(\Omega,\mu)} = 1$, d.h.

$$f_n \in \overline{B_1(0)} := \left\{ g \in X\colon \|g\|_{L^p(\Omega,\mu)} \le 1 \right\} \subseteq L^p(\Omega, \mu).$$

Da $p \in (1,\infty)$ ist, folgt, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ schwach kompakt ist in $L^p(\Omega,\mu)$. Definiere für $x \in \Omega$:

$$l_x \colon L^p(\Omega,\mu) \to \mathbb{C},\ g \mapsto \int_\Omega k(x,y)g(y)\mathrm{d}\mu(y).$$

Auf Grund von $\|k\|_{p,q} < \infty$, existiert eine Teilmenge $\Omega' \subseteq \Omega$ so, dass

$$\|k(x,\cdot)\|_{L^q(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |k(x,y)|^q \mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

für alle $x \in \Omega'$ und $\mu\left(\Omega \backslash \Omega'\right) = 0$. Nun haben wir für alle $g \in L^p(\Omega,\mu)$ nach der Hölder-Ungleichung bzgl. dem Paar (p,q) für alle $x \in \Omega'$:

$$\begin{aligned}|l_x(g)| &= \left|\int_\Omega k(x,y)g(y)\mathrm{d}\mu(y)\right| \leq \int_\Omega |k(x,y)g(y)|\mathrm{d}\mu(y) \\ &\leq \left(\int_\Omega |k(x,y)|^q \mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |g(y)|^p \mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} = \|k(x,\cdot)\|_{L^q(\Omega,\mu)} \|g\|_{L^p(\Omega,\mu)}.\end{aligned}$$

Damit ist l_x wohl-definiert, und da das Integral linear ist, ist l_x auch linear, damit folgt, dass $l_x \in (L^p(\Omega,\mu))'$ für alle $x \in \Omega'$. Nach schwacher Kompaktheit folgt nun die Existenz einer Teilfolge $\left(f_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $f \in L^p(\Omega,\mu)$ mit

$$f_{n_j} \to f \text{ schwach in } \sigma\left(X, X'\right),$$

d.h. insbesondere für alle $x \in \Omega'$:

$$T_k f_{n_j}(x) = l_x\left(f_{n_j}\right) \to l_x(f) = T_k f(x) \text{ für } j \to \infty.$$

Setze nun $h(x) := \left(\int_\Omega |k(x,y)|^q \mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$ für $x \in \Omega$, so gilt:

$$\left|T_k f_{n_j}(x)\right| = \left|l_x\left(f_{n_j}\right)\right| \leq h(x),\ |T_k f(x)| = |l_x(f)| \leq h(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$ und $h \in L^p(\Omega,\mu)$ mit

$$\|h\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega \left|\int_\Omega |k(x,y)|^q \mathrm{d}\mu(y)\right|^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \|k\|_{p,q} < \infty.$$

So folgt mit dem Satz von Lebesgue:

$$\lim_{j\to\infty} \left\|T_k f_{n_j} - T_k f\right\|_{L^p(\Omega,\mu)} = 0,$$

d.h. der Operator T_k ist kompakt (per Definition). □

(ii) Nach (i) ist T_k kompakt und sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Fall 1.: $\lambda \notin \sigma(T_k)$

Dann ist per Definition der Operator

$$\lambda \mathrm{Id}_X - T_k \colon L^p(\Omega,\mu) \to L^p(\Omega,\mu) \text{ beschränkt invertierbar,}$$

woraus (1) folgt mit $\lambda f - T_k f = g$ genau dann, wenn $f = R(\lambda, T_k)\, g$ ist für $g \in L^p(\Omega,\mu)$.

Fall 2.: $\lambda \in \sigma(T_k)$

Da $\lambda \neq 0$ ist, ist $\lambda \in \sigma_p(T_k)$, d.h. λ ist ein Eigenwert mit

$$\infty > n := \dim\left(\ker\left(\lambda \mathrm{Id}_X - T_k\right)\right) = \operatorname{codim}\left(\operatorname{range}\left(\lambda \mathrm{Id}_X - T_k\right)\right) = \dim\left(\ker\left(\lambda \mathrm{Id}_{X'} - T_k'\right)\right),$$

(siehe Beweis von $\mathrm{Id}_X - K \in \Phi(X,X)$ für K kompakt) da $\lambda \mathrm{Id}_X - T_k \in \Phi(X,X)$ ist mit Fredholm-Index $\operatorname{ind}(\lambda \mathrm{Id}_X - T_k) = 0$. Weiter ist:

$$\operatorname{range}\left(\lambda \mathrm{Id}_X - T_k\right) = \overline{\operatorname{range}\left(\lambda \mathrm{Id}_X - T_k\right)} = \ker\left(\lambda \mathrm{Id}_{X'} - T_k'\right)_\perp,$$

da $\lambda \mathrm{Id}_X - T_k$ ein Fredholm-Operator ist. Wähle nun also eine Basis $g_1, \ldots, g_n \in \ker\left(\lambda \mathrm{Id}_{X'} - T_k'\right)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(*) \text{ hat eine Lösung } &\Leftrightarrow\ g \in \operatorname{range}\left(\lambda \mathrm{Id}_X - T_k\right) \ \Leftrightarrow\ g \in \ker\left(\lambda \mathrm{Id}_{X'} - T_k'\right)_\perp \\ &\Leftrightarrow \int_\Omega g(x)h(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \text{ für alle } h \in \ker\left(\lambda \mathrm{Id}_{L^q(\Omega,\mu)} - T_k'\right) \\ &\Leftrightarrow \int_\Omega g(x)g_i(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Ist nun $f_0 \in L^p(\Omega,\mu)$ eine Lösung von $(*)$, dann ist der Lösungsraum gerade

$$\mathcal{L} = f_0 + \ker\left(\lambda \mathrm{Id}_X - T_k\right) \text{ und } \dim(\mathcal{L}) = \dim\left(\ker\left(\lambda \mathrm{Id}_X - T_k\right)\right) = n < \infty.$$

□

Aufgabe 3 (Anwendung der Fredholm-Alternative)

Sei $X = L^2(0,\infty)$. Wir definieren den Integraloperator $T\colon X \to X$ durch

$$Tf(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y \text{ für } f \in X, x \in (0,\infty).$$

Zeigen Sie:

(i) T ist ein wohl-definierter, linearer und stetiger Operator.

(ii) Zeigen Sie, dass T nicht kompakt sein kann.

Lösung von Aufgabe 3

Wir zeigen erst das folgende Lemma:
Lemma: Seien $p \in [1,\infty)$ und $k\colon (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{C}$ messbar mit

$$\int_0^\infty |k(1,y)|y^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}y =: A_p < \infty,$$

und k positiv homogen vom Grad -1 ist, d.h. $k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1}k(x,y)$ für alle $x, y \in (0,\infty)$ und $\lambda > 0$. Dann ist der Integraloperator

$$T_k\colon L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty),\ f \mapsto \int_0^\infty k(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

ein wohl-definierter, linearer und stetiger Operator.

Beweis: T_k **ist wohl-definiert**: Es gilt für $f \in L^p(0,\infty)$ nach Substitution, Minkowski-Ungleichung Fall $(1,p)$ und einer zweiten Substitution:

$$\begin{aligned}
\|T_k f\|_{L^p(0,\infty)} &= \left(\int_0^\infty \left|\int_0^\infty k(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^{-1}\left|k\left(1,\frac{y}{x}\right)f(y)\right|\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \left(\lambda = \frac{1}{x}\right)\\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty |k(1,z)|\cdot|f(xz)|\,\mathrm{d}z\right)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \left(z = \frac{y}{x}\right)\\
&\le \int_0^\infty \left(\int_0^\infty |k(1,z)|^p\,|f(xz)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z\\
&= \int_0^\infty |k(1,z)|\left(\int_0^\infty |f(xz)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z\\
&= \int_0^\infty |k(1,z)|\left(\int_0^\infty \frac{1}{z}\,|f(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}z \qquad (y = xz)\\
&= \int_0^\infty |k(1,z)|\,z^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}z\left(\int_0^\infty |f(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= A_p\,\|f\|_{L^p(0,\infty)} < \infty.
\end{aligned}$$

T_k **ist linear**: Das ist klar, da das Integral linear ist.
T_k **ist stetig**: Wegen der Linearität und der Beschränkt (gezeigt bei der Wohl-Definiertheit) folgt, dass T_k stetig ist mit

$$T_k \in L\left(L^p(0,1\infty)\right) \text{ mit } \|T_k\|_{L^p(0,\infty)} \le A_p < \infty.$$

$\square$

(i) Setzen wir für $x, y \in (0,\infty)$:

$$k(x,y) := \frac{1}{x}\chi_{(0,x)}(y).$$

So ist k messbar und positiv homogen von Grad -1, denn für $x, y \in (0,\infty)$ und $\lambda > 0$ ist

$$k(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda x}\chi_{(0,\lambda x)}(\lambda y) = \lambda^{-1}\frac{1}{x}\chi_{(0,x)}(y) = \lambda^{-1}k(x,y).$$

Weiter gilt:

$$\int_0^\infty |k(1,y)|\, y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = \int_0^\infty \left|\frac{1}{1}\chi_{(0,1)}(y)\right| y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$
$$= [2\sqrt{y}]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2 - 0 = 2 < \infty,$$

und

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{1}{x}\chi_{(0,x)}(y)f(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty k(x,y)f(y)\mathrm{d}y = T_k f(x)$$

für alle $f \in L^2(0,\infty)$ und $x \in (0,\infty)$. Also ist nach dem obigen Lemma ($p = 2$) der Integraloperator $T_k = T$ ein wohl-definierter, linearer und stetiger Operator.
(ii) T **ist nicht kompakt**:
Idee: Zeige, dass 2 im Spektrum liegt, aber kein Eigenwert ist, was ein Widerspruch zur Fredholm-Alternative wäre.
(1) $2 \notin \sigma_p(T)$:
Es gilt

$$Tf = 2f \;\Leftrightarrow\; 2f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \text{ für fast alle } x \in (0,\infty)$$
$$\Leftrightarrow\; 2xf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

d.h. f ist stetig auf $(0,\infty)$ und differenzierbar überall auf $(0,\infty)$. Ableiten ergibt nun:

$$2f(x) + 2xf'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (0,\infty),$$

also erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f'(x) = -\frac{1}{2x}f(x) \text{ für } x \in (0,\infty).$$

Die Lösungen davon lauten

$$f(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}} = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\log(x)} = \frac{c}{\sqrt{x}},\; x \in (0,\infty)$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$. Aber $f \in L^2(0,\infty)$ genau dann, wenn $c = 0$ ist. Damit ist $f = 0$ in $L^2(0,\infty)$ und so ist $2\mathrm{Id}_{L(0,\infty)} - T$ injektiv, d.h. $2 \notin \sigma_p(T)$.
(2) $2 \notin \rho(T)$:
Setze zu $a \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ die Funktion $f_a(t) := \chi_{[0,1]}(t)\sqrt{1-2a}\,t^{-a}$ für $t \in (0,\infty)$. Dann gilt:

$$\|f_a\|_{L^2(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty |f_a(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty \left|\chi_{[0,1]}(t)\sqrt{1-2a}\,t^{-a}\right|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,1]}(t)^2(1-2a)t^{-2a}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty \chi_{[0,1]}(t)(1-2a)t^{-2a}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\int_0^1 (1-2a)t^{-2a}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left[\frac{1-2a}{1-2a}t^{1-2a}\right]_0^1\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\left[t^{1-2a}\right]_0^1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1^{1-2a} - 0^{1-2a}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (1-0)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1,$$

sowie

$$\left(2\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right)f_a(x) = 2\chi_{[0,1]}(x)\sqrt{1-2a}\,x^{-a} - \frac{1}{x}\int_0^x \chi_{[0,1]}(y)\sqrt{1-2a}\,y^{-a}\mathrm{d}y \quad = 2f_a(x) - \frac{1}{x}\left[\frac{\sqrt{1-2a}}{1-a}y^{1-a}\right]_0^{\min\{1,x\}}$$
$$= 2f_a(x) - \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1-2a}}{1-a}\min\{1,x\}^{1-a} - \frac{\sqrt{1-2a}}{1-a}0^{1-a}\right)$$
$$= 2f_a(x) - \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1-2a}}{1-a}\min\left\{1,x^{1-a}\right\} - 0\right)$$
$$= 2f_a(x) - \frac{\sqrt{1-2a}}{(1-a)x}\min\left\{1,x^{1-a}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2f_a(x) - \frac{\sqrt{1-2a}}{(1-a)x} x^{1-a} \chi_{[0,1]}(x) - \frac{\sqrt{1-2a}}{(1-a)x} \chi_{(1,\infty)}(x) \\
&= 2f_a(x) - \frac{1}{1-a} f_a(x) - \frac{\sqrt{1-2a}}{(1-a)x} \chi_{(1,\infty)}(x) \\
&= \left(2 - \frac{1}{1-a}\right) f_a(x) - \frac{\sqrt{1-2a}}{(1-a)x} \chi_{(1,\infty)}(x)
\end{aligned}
$$

für alle $x \in (0,\infty)$, und damit

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(2\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right) f_a \right\|_{L^2(0,\infty)}^2 &= \int_0^\infty \left| \left(2\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right) f_a(x) \right|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \left| \left(2 - \frac{1}{1-a}\right) f_a(x) - \frac{\sqrt{1-2a}}{(1-a)x} \chi_{(1,\infty)}(x) \right|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{1-a}\right)^2 |f_a(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1-2a}{(1-a)^2 x^2} \mathrm{d}x \\
&= \left(2 - \frac{1}{1-a}\right)^2 \int_0^\infty |f_a(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \left[-\frac{1-2a}{(1-a)^2 x} \right]_1^\infty \\
&= \left(2 - \frac{1}{1-a}\right)^2 \|f_a\|_{L^2(0,\infty)}^2 + \left(0 + \frac{1-2a}{(1-a)^2}\right) \\
&= \left(2 - \frac{1}{1-a}\right)^2 + \frac{1-2a}{(1-a)^2} \\
&\to \left(2 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0 + 0 = 0 \text{ für } a \to \frac{1}{2}^-,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
\lim_{a \to \frac{1}{2}^-} \left\| \left(2\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right) f_a \right\|_{L^2(0,\infty)} = 0.
$$

Hätte nun der Operator $2\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T$ eine beschränkte Inverse S, so würde

$$
\|f\|_{L^2(0,\infty)} = \left\| S \left(2\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right) f \right\|_{L^2(0,\infty)} \le \|S\|_{L(L^2(0,\infty))} \left\| \left(2\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right) f \right\|_{L^2(0,\infty)}
$$

für alle Funktionen $f \in L^2(0,\infty)$ gelten, was implizieren würde

$$
1 = \|f_a\|_{L^2(0,\infty)} \le\le \|S\|_{L(L^2(0,\infty))} \left\| \left(2\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right) f_a \right\|_{L^2(0,\infty)} \to 0 \text{ für } a \to \frac{1}{2}^-,
$$

was ein Widerspruch ist. Daher ist $2 \notin \rho(T)$ und somit $2 \in \sigma(T)$.

(3) Widerspruch zur Fredholm-Alternative:

Da $2 \neq 0$ ist und $2 \notin \sigma_p(T) \cup \rho(T)$ ist, kann der Operator T nicht kompakt sein, denn sonst müsste aus $\lambda \notin \sigma_p(T)$ (d.h. $\lambda\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T$ ist injektiv) folgen, dass $\lambda\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T$ surjektiv ist, damit wäre aber $\lambda\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T \colon L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ linear, stetig und bijektiv sein. So würde $S = \left(\lambda\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right)^{-1} : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ wohl-definiert, linear und stetig existieren mit

$$
S\left(\lambda\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right) = \left(\lambda\mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)} - T\right) S = \mathrm{Id}_{L^2(0,\infty)},
$$

d.h. $\lambda \in \rho(T)$. $\square$