06.06.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Spektraltheorie

8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Nachtrag zur letzten Übung)

In dieser Aufgabe wollen wir die Optimalität der Hölder-Ungleichung beweisen und daraus die Minkowski-Ungleichung folgern.

(i) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $p \in [1, \infty]$ und $f \colon X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass falls

$$\sup_{g \in L^q(X,\mu) \colon \|g\|_{L^q(X,\mu)} \leq 1} \int_X |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

wobei $q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ der konjugierte Hölder-Exponent ist, gilt, dann ist $f \in L^p(X, \mu)$ mit

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \sup_{g \in L^q(X,\mu) \colon \|g\|_{L^q(X,\mu)} \leq 1} \int_X f(x)g(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

(ii) Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume und $f \colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$ folgt:

$$\left\| \|f(\cdot, y)\|_{L^p(X_1,\mu_1)} \right\|_{L^q(X_2,\mu_2)} \leq \left\| \|f(x_1, \cdot)\|_{L^q(X_2,\mu_2)} \right\|_{L^p(X_1,\mu_1)}.$$

Aufgabe 2 (Stetiger Funktionalkalkül und Verkettungen)

Seien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum, $T \in L(H)$ selbst-adjungiert, sowie $g \in C^0(\sigma(T), \mathbb{R})$ und $f \in C^0(g(\sigma(T)))$. Zeigen Sie:

$$(f \circ g)(T) = f(g(T)).$$

Aufgabe 3 (Spektrale Abbildungseigenschaft für Polynome)

Seien $(X \, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom und $A \in L(X)$. Zeigen Sie, dass dann $p(A) \in L(X)$ ist mit

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)).$$