06.06.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

8. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Nachtrag zur letzten Übung)

In dieser Aufgabe wollen wir die Optimalität der Hölder-Ungleichung beweisen und daraus die Minkowski-Ungleichung folgern.

(i) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $p \in [1, \infty]$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass falls

$$\sup_{g \in L^q(X,\mu)\colon \|g\|_{L^q(X,\mu)} \leq 1} \int_X |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

wobei $q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ der konjugierte Hölder-Exponent ist, gilt, dann ist $f \in L^p(X, \mu)$ mit

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \sup_{g \in L^q(X,\mu)\colon \|g\|_{L^q(X,\mu)} \leq 1} \int_X f(x)g(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

(ii) Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume und $f\colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$ folgt:

$$\left\| \|f(\cdot, y)\|_{L^p(X_1,\mu_1)} \right\|_{L^q(X_2,\mu_2)} \leq \left\| \|f(x_1, \cdot)\|_{L^q(X_2,\mu_2)} \right\|_{L^p(X_1,\mu_1)}.$$

Lösung von Aufgabe 1

Wir zeigen zuerst folgendes Lemma:
Lemma: (Lyapunov Interpolation) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$, und $\theta \in [0, 1]$ und setze

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Dann gilt: $L^{p_0}(X, \mu) \cap L^{p_1}(X, \mu) \subseteq L^p(X, \mu)$ mit

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} \leq \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_0}(X,\mu)} \|f\|^{\theta}_{L^{p_1}(X,\mu)} \text{ für alle } f \in L^{p_0}(X, \mu) \cap L^{p_1}(X, \mu).$$

Beweis: Ist $p_0 = p_1$, so $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0}$, d.h. $p = p_0 = p_1$ und es wäre nichts zu zeigen. Ebenso bei den Fällen $\theta \in \{0, 1\}$. Seien von nun an also $p_0 < p_1$ und $\theta \in (0, 1)$.
Fall 1. $p_1 = \infty$: So ist $p_0 < \infty$. Es gilt:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} \Leftrightarrow p_0 = (1-\theta)p.$$

Dann gilt für eine Funktion $f \in L^{p_0}(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu)$:

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(X,\mu)} &= \int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = \int_X |f(x)|^{\theta p} |f(x)|^{(1-\theta)p} \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X \|f\|^{\theta p}_{L^\infty(X,\mu)} |f(x)|^{p_0} \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \|f\|^{\theta p}_{L^\infty(X,\mu)} \|f\|^{p_0}_{L^{p_0}(X,\mu)}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{p_0}{p} = \frac{(1-\theta)p}{p} = 1 - \theta$$

folgt für alle Funktionen $f \in L^{p_0}(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$:

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|^{\theta}_{L^\infty(X,\mu)} \|f\|^{\frac{p_0}{p}}_{L^{p_0}(X,\mu)} = \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_0}(X,\mu)} \|f\|^{\theta}_{L^\infty(X,\mu)},$$

d.h. $L^{p_0}(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu) \subseteq L^p(X,\mu)$.
Fall 2. $p_1 < \infty$: Dann ist $1 \le p_0 < p_1 < \infty$. Setze

$$\widetilde{p}_0 := \frac{p_0}{(1-\theta)p} \text{ und } \widetilde{p}_1 := \frac{p_1}{\theta p}.$$

Dann sind $\widetilde{p}_0, \widetilde{p}_1 \in (1,\infty)$ mit

$$\frac{1}{\widetilde{p}_0} + \frac{1}{\widetilde{p}_1} = \frac{(1-\theta)p}{p_0} + \frac{\theta p}{p_1} = \left(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right) p = \frac{1}{p} \cdot p = 1.$$

Es gilt nach der Hölder-Ungleichung für das Paar $(\widetilde{p}_0, \widetilde{q}_0)$ für alle Funktionen $f \in L^{p_0}(X,\mu) \cap L^{p_1}(X,\mu)$:

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(X,\mu)} &= \int_x |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = \int_X |f(x)|^{(1-\theta)p} |f(x)|^{\theta p} \mathrm{d}\mu(x) \\
&\le \left(\int_X |f(x)|^{(1-\theta)p\widetilde{p}_0} \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{\widetilde{p}_0}} \left(\int_X |f(x)|^{\theta p \widetilde{p}_1} \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{\widetilde{p}_1}} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^{(1-\theta)p\frac{p_0}{(1-\theta)p}} \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{(1-\theta)p}{p_0}} \left(\int_X |f(x)|^{\theta p \frac{p_1}{\theta p}} \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{\theta p}{p_1}} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^{p_0} \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{(1-\theta)p}{p_0}} \left(\int_X |f(x)|^{p_1} \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{\theta p}{p_1}} \\
&= \|f\|^{(1-\theta)p}_{L^{p_0}(X,\mu)} \|f\|^{\theta p}_{L^{p_1}(X,\mu)}.
\end{aligned}$$

Dies liefert für alle Funktionen $f \in L^{p_0}(X,\mu) \cap L^{p_1}(X,\mu)$:

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} \le \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_0}(X,\mu)} \|f\|^{\theta}_{L^{p_1}(X,\mu)},$$

d.h. $L^{p_0}(X,\mu) \cap L^{p_1}(X,\mu) \subseteq L^p(X,\mu)$. □
(i) O.B.d.A.: Seien $\mu(X) > 0$ und $f \neq 0$ auf einer Menge $U \subseteq X$ mit $\mu(U) > 0$.
Setze

$$C := \sup_{g \in L^q(X,\mu)\colon \|g\|_{L^q(X,\mu)} \le 1} \int_X |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) \in (0,\infty).$$

Fall 1. $p = \infty$: Dann ist $q = 1$. Sei $\lambda > 0$ mit

$$\mu(\{x \in X\colon |f(x)| \ge \lambda\}) > 0$$

und setze

$$E_\lambda := \{x \in X\colon |f(x)| \ge \lambda\} \subseteq X.$$

Wähle eine Funktion $g \in L^1(X,\mu)$ mit $g_0 \ge 0$ auf X, $\int_X g_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = 1$ und

$$\{x \in X\colon g_0(x) \neq 0\} \subseteq E_\lambda.$$

Setze

$$g(x) := \frac{f(x)}{|f(x)|} g_0(x) \text{ für } x \in X.$$

Dann ist $g \in L^1(X,\mu)$, denn es ist

$$\|g\|_{L^1(X,\mu)} = \int_X |g(x)|\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{|f(x)|}{|f(x)|} g_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X g_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \|g_0\|_{L^1(X,\mu)} = 1 < \infty,$$

und per Voraussetzung an die Funktion f ist das Produkt fg integrierbar mit

$$\begin{aligned}
C \ge \int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \frac{|f(x)|^2}{|f(x)|} g_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X |f(x)| g_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{E_\lambda} |f(x)| g_0(x)\mathrm{d}\mu(x) \\
&\ge \lambda \int_{E_\lambda} g_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lambda \int_X g_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lambda,
\end{aligned}$$

d.h. $|f(x)| \leq C$ für μ-fast alle $x \in X$, also $f \in L^\infty(X,\mu)$ und es ist:

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} \leq \sup_{g \in L^1(X,\mu)\colon \|g\|_{L^1(X,\mu)} \leq 1} \int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Fall 2. $p \in [1,\infty)$: Wähle eine Mengenfolge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $E_k \subseteq E_{k+1}$ und $\mu(E_k) \in (0,\infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sowie

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = X.$$

Setze nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} G_n &:= \{x \in X \colon |f(x)| \leq n\} \subseteq X, \\ f_n(x) &:= \chi_{E_n \cap G_n}(x) f(x) \text{ für } x \in X. \end{aligned}$$

O.B.d.A.: $f_n \neq 0$ auf einer Menge $V \subseteq X$ mit $\mu(V) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sonst wähle $n \in \mathbb{N}$ groß genug.
Nun ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n \in L^1(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |\chi_{E_n\cap G_n}(x)f(x)| \leq n \text{ für alle } x \in X, \\ \|f_n\|_{L^1(X,\mu)} &= \int_X |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X |\chi_{E_n\cap G_n}(x)f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{E_n\cap G_n} |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq n\int_{E_n\cap G_n} 1\mathrm{d}\mu(x) \leq n\int_{E_n} 1\mathrm{d}\mu(x) = n\mu(E_n) < \infty. \end{aligned}$$

Also ist nach der Lyapunov Interpolation (siehe oberes Lemma): $f_n \in L^p(X,\mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $p \in [1,\infty]$. Es gilt offensichtlich:

- (Punktweise Konvergenz) $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)|^p = |f(x)|^p$ für μ-fast alle $x \in X$.
- (Monotonie) $|f_n(x)|^p \leq |f_{n+1}(x)|^p$ für alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$.
- (Positivität) $|f_n(x)| \geq 0$ für alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$.

Also folgt nach dem Satz von Beppo-Levi (Satz von der monotonen Konvergenz), dass

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(X,\mu)} &= \left(\int_X |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X |f_n(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p(X,\mu)}. \end{aligned}$$

Fall 2.1. $p \in (1,\infty)$: Dann ist auch $q \in (1,\infty)$. Setze zu jedem $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)\,|f_n(x)|^{p-1}}{|f_n(x)|\,\|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{\frac{p}{q}}} \text{ für } x \in X.$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $g_n \in L^q(X,\mu)$ ist mit $\|g_n\|_{L^q(X,\mu)} = 1$, denn wir haben

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{L^q(X,\mu)} &= \left(\int_X |g_n(x)|^q\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X \frac{|f_n(x)|^q\,|f_n(x)|^{(p-1)q}}{|f_n(x)|^q\,\|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{\frac{p}{q}\cdot q}}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{-\frac{p}{q}}\left(\int_X |f_n(x)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} = \|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{-\frac{p}{q}}\left(\int_X |f_n(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{-\frac{p}{q}}\,\|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{\frac{p}{q}} = 1 < \infty, \end{aligned}$$

wegen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow (p-1)q = p.$$

Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_X f(x)g_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x)\chi_{E_n\cap G_n}(x)g_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f_n(x)g_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{|f_n(x)|^2\,|f_n(x)|^{p-1}}{|f_n(x)|\,\|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{\frac{p}{q}}}\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{-\frac{p}{q}}\int_X |f_n(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) = \|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{p-\frac{p}{q}} = \|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{p-p\frac{p-1}{p}} = \|f_n\|_{L^p(X,\mu)}^{p-p+1} = \|f_n\|_{L^p(X,\mu)}.$$

Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_{L^p(X,\mu)} \leq \sup_{g\in L^q(X,\mu)\colon\, \|g\|_{L^q(X,\mu)}\leq 1}\int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Demnach ist $f \in L^p(X,\mu)$ mit

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} \leq \sup_{g\in L^q(X,\mu)\colon\, \|g\|_{L^q(X,\mu)}\leq 1}\int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) < \infty.$$

Fall 2.2. $p = 1$: Dann ist $q = \infty$. Setze zu jedem $n \in \mathbb{N}$:

$$H_n := \{x \in X\colon f_n(x) \neq 0\},$$
$$g_n(x) := \chi_{H_n}(x)\frac{f_n(x)}{|f_n(x)|} \text{ für } x \in X.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und allen $x \in X$:

$$|g_n(x)| = |\chi_{H_n}(x)|\,\frac{|f_n(x)|}{|f_n(x)|} = |\chi_{H_n}(x)| \leq 1,$$

d.h. $g_n \in L^\infty(X,\mu)$ mit $\|g_n\|_{L^\infty(X,\mu)} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_X f(x)g_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \chi_{H_n}(x)\frac{|f_n(x)|^2}{|f_n(x)|}\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \chi_{H_n}(x)\,|f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) = \|f_n\|_{L^1(X,\mu)}.$$

Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_{L^1(X,\mu)} \leq \sup_{g\in L^\infty(X,\mu)\colon\, \|g\|_{L^\infty(X,\mu)}\leq 1}\int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Damit ist $f \in L^1(X,\mu)$ mit

$$\|f\|_{L^1(X,\mu)} \leq \sup_{g\in L^\infty(X,\mu)\colon\, \|g\|_{L^\infty(X,\mu)}\leq 1}\int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) < \infty.$$

Rückrichtung: Sei hier $p \in [1,\infty]$. Haben wir gezeigt, dass $f \in L^p(X,\mu)$ ist, dann folgt aus der Hölder-Ungleichung mit Paar (p,q):

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(X,\mu)} &\leq \sup_{g\in L^q(X,\mu)\colon\, \|g\|_{L^q(X,\mu)}\leq 1}\int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \sup_{g\in L^q(X,\mu)\colon\, \|g\|_{L^q(X,\mu)}\leq 1}\int_X |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \sup_{g\in L^q(X,\mu)\colon\, \|g\|_{L^q(X,\mu)}\leq 1}\|f\|_{L^p(X,\mu)}\,\|g\|_{L^p(X,\mu)} \\
&= \|f\|_{L^p(X,\mu)},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \sup_{g\in L^q(X,\mu)\colon\, \|g\|_{L^q(X,\mu)}\leq 1}\int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

□

(ii) **Fall 1.** $q = \infty$:
Fall 1.1. $p = \infty$: Dann ist

$$\begin{aligned}
\left\|\|f(\cdot,x_2)\|_{L^\infty(X_1,\mu_1)}\right\|_{L^\infty(X_2,\mu_2)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x_2\in X_2}\left|\operatorname*{ess\,sup}_{x_1\in X_1}|f(x_1,x_2)|\right| \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x_2\in X_2}\operatorname*{ess\,sup}_{x_1\in X_1}|f(x_1,x_2)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \operatorname*{ess\,sup}_{x_1 \in X_1} \left| \operatorname*{ess\,sup}_{x_2 \in X_2} |f(x_1, x_2)| \right| \\
&= \left\| \|f(x_1, \cdot)\|_{L^\infty(X_2,\mu_2)} \right\|_{L^\infty(X_1,\mu_1)}.
\end{aligned}
$$

Fall 1.2. $p < \infty$: Dann ist

$$
\begin{aligned}
\left\| \|f(\cdot, x_2)\|_{L^p(X_1,\mu_1)} \right\|_{L^\infty(X_2,\mu_2)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x_2 \in X_2} \left| \left(\int_{X_1} |f(x_1, x_2)|^p \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x_2 \in X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1, x_2)|^p \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{X_1} \left| \operatorname*{ess\,sup}_{x_2 \in X_2} |f(x_1, x_2)| \right|^p \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| \|f(x_1, \cdot)\|_{L^\infty(X_2,\mu_2)} \right\|_{L^p(X_1,\mu_1)}.
\end{aligned}
$$

Fall 2. $q < \infty$: So ist $1 \leq p \leq q < \infty$. Setze $r_1 := \frac{q}{p} \in [1, \infty)$ und wähle den passenden Hölder-Exponenten $r_2 \in (1, \infty]$ mit

$$
\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1.
$$

Dann ist nach Teil (i), dem Satz von Fubini und der Hölder-Ungleichung mit dem Paar (r_1, r_2)

$$
\begin{aligned}
\left\| \|f(\cdot, x_2)\|_{L^p(X_1,\mu_1)} \right\|_{L^q(X_2,\mu_2)} &= \left(\int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1, x_2)|^p \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\| \int_{X_1} |f(x_1, \cdot)|^p \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right\|_{L^{r_1}(X_2,\mu_2)}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sup_{g \in L^{r_2}(X_2,\mu_2) :\, \|g\|_{L^{r_2}(X_2,\mu_2)} \leq 1} \int_{X_2} \int_{X_1} |f(x_1, x_2)|^p \, g(x_2) \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sup_{g \in L^{r_2}(X_2,\mu_2) :\, \|g\|_{L^{r_2}(X_2,\mu_2)} \leq 1} \int_{X_1} \int_{X_2} |f(x_1, x_2)|^p \, g(x_2) \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sup_{g \in L^{r_2}(X_2,\mu_2) :\, \|g\|_{L^{r_2}(X_2,\mu_2)} \leq 1} \int_{X_1} \|g\|_{L^{r_2}(X_2,\mu_2)} \, \||f(x_1, \cdot)|^p\|_{L^{r_1}(X_2,\mu_2)} \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1, x_2)|^{pr_1} \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right)^{\frac{1}{r_1}} \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1, x_2)|^q \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| \|f(x_1, \cdot)\|_{L^q(X_2,\mu_2)} \right\|_{L^p(X_1,\mu_1)},
\end{aligned}
$$

da $pr_1 = p \cdot \frac{q}{p} = q$ ist. Dies war zu zeigen. □

Aufgabe 2 (Stetiger Funktionalkalkül und Verkettungen)

Seien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum, $T \in L(H)$ selbst-adjungiert, sowie $g \in C^0(\sigma(T), \mathbb{R})$ und $f \in C^0(g(\sigma(T)))$. Zeigen Sie:

$$
(f \circ g)(T) = f(g(T)).
$$

Lösung von Aufgabe 2

Wohl-Definiertheit: Es ist $f \circ g \in C^0(\sigma(T))$, da Verkettung stetiger Funktionen stetig ist. Demnach ist die linke Seite $(f \circ g)(T)$ wohl-definiert nach dem stetigen Funktionalkalkül. Da g reell-wertig ist, folgt nach dem stetigen Funktionalkalkül (Adjungiertheit):

$$
g(T)^* = \overline{g}(T^*) = \overline{g}(T) = g(T),
$$

d.h. der Operator $g(T) \in L(X)$ ist selbst-adjungiert. Nach der Spektralen Abbildungseigenschaft gilt:

$$\sigma(g(\sigma(T)) = g(\sigma(T)).$$

also ist $f \in C^0\left(g(\sigma(T))\right) = C^0\left(\sigma(g(T))\right)$ und damit ist auch die rechte Seite $f(g(T))$ wohl-definiert.

f **Polynom**: Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, ein Polynom mit Koeffizienten $(a_n)_{n=0}^N \subseteq \mathbb{C}$ und $g \in C^0(\sigma(T), \mathbb{R})$ stetig. Laut den Eigenschaften des stetigen Funktionalkalküls (Linearität, Normniertheit und Multiplikativität) gilt:

$$(f \circ g)(T) = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n g(\cdot)^n\right)(T) = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(g^n\right)(T) = \sum_{n=0}^{N} a_n g(T)^n = f\left(g(T)\right).$$

Approximation von f: Seien nun $g \in C^0\left(\sigma(T), \mathbb{R}\right)$ und $f \in C^0\left(g(\sigma(T)\right)$. Laut dem Satz von Weierstraß existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0\left(g(\sigma(T))\right)$ von Polynomen mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ gleichmäßig auf } g(\sigma(T)).$$

Damit gilt dann auch

$$\|(f \circ g) - (f_n \circ g)\|_{C^0(\sigma(T))} = \|f - f_n\|_{C^0(g(\sigma(T)))} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Es folgt nun aus Linearität des stetigen Funktionalkalküls, dem obigen und der Beschränktheit von $\left[(f \circ g) - (f_n \circ g)\right](T)$, $\left(f_n - f\right)\left(g(T)\right)$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\|(f \circ g)(T) - f(g(T))\|_{L(X)} &\leq \|(f \circ g)(T) - \left(f_n \circ g\right)(T)\|_{L(X)} + \|\left(f_n \circ g\right)(T) - f(g(T))\|_{L(X)} \\
&= \|\left[(f \circ g) - (f_n \circ g)\right](T)\|_{L(X)} + \|f_n(g(T)) - f(g(T))\|_{L(X)} \\
&= \|f \circ g - f_n \circ g\|_{C^0(\sigma(T))} + \|\left(f_n - f\right)\left(g(T)\right)\|_{L(X)} \\
&= \|f \circ g - f_n \circ g\|_{C^0(\sigma(T))} + \|f_n - f\|_{C^0(\sigma(g(T))} \\
&= \|f \circ g - f_n \circ g\|_{C^0(\sigma(T))} + \|f_n - f\|_{C^0(g(\sigma(T))} \to 0 + 0 = 0 \text{ für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Also ist $(f \circ g)(T) = f(g(T))$. □

Aufgabe 3 (Spektrale Abbildungseigenschaft für Polynome)

Seien $(X \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom und $A \in L(X)$. Zeigen Sie, dass dann $p(A) \in L(X)$ ist mit

$$\sigma(p(A)) = p\left(\sigma(A)\right).$$

Lösung von Aufgabe 3

Definition: (Kalkül für Polynome) Sei $A \in L(X)$, $p\colon \lambda \mapsto p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ ein Polynom mit Koeffizienten $(a_k)_{k=0}^n \subseteq \mathbb{C}$. Dann definieren wir

$$p(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k.$$

Bemerkung: Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}$ den Vektorraum/ Algebra aller Polynome. Für jedes Polynom $p \in \mathcal{P}$ und jeden stetigen Operator $A \in L(X)$ ist $p(A) \in L(X)$ wohl-definiert.

Satz: (Eigenschaften des Kalküls für Polynome) Seien $p_1, p_2, p \in \mathcal{P}$ mit $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ mit Koeffizienten $(a_k)_{k=0}^n \subseteq \mathbb{C}$, sowie $A \in L(X)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten die Eigenschaften:

- Linearität: $\left(\alpha p_1 + \beta p_2\right)(A) = \alpha p_1(A) + \beta p_2(A)$.
- Multiplikativität: $\left(p_1 \cdot p_2\right)(A) = p_1(A)p_2(A) = p_2(A)p_1(A) = \left(p_2 \cdot p_1\right)(A)$.
- Dualität: $p(A)' = \overline{p}\left(A'\right)$.
- Beschränktheit: $\|p(A)\|_{L(X)} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, \|A\|_{L(X)}^k$.
- Spektrale Abbildungseigenschaft: $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$.

Beweis: Linearität und Multiplikativität folgen direkt aus der Definition. Die Dualität folgt aus $\left(A^k\right)' = (A')^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Beschränktheit folgt aus der Dreiecks-Ungleichung und der Submultiplikativität der Norm $\|\cdot\|_{L(X)}$. Um die spektrale Abbildungseigenschaft zu zeigen, beweisen wir beide Mengeninklusionen:
"$\supseteq$": Sei $\mu \in \sigma(A)$. Dann hat das Polynom $\lambda \mapsto p(\mu) - p(\lambda) \in \mathcal{P}$ eine Nullstelle in $\lambda = \mu$, d.h. es existiert ein weiteres Polynom $q \in \mathcal{P}$ so, dass

$$p(\mu) - p(\lambda) = (\mu - \lambda)q(\lambda) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

Aus der Linearität und der Multiplikativität des Kalküls folgt

$$p(\mu)\mathrm{Id}_X - p(A) = (\mu\mathrm{Id}_X - A)\, q(A) = q(A)\, (\mu\mathrm{Id}_X - A)\,.$$

Der Operator $\mu\mathrm{Id}_X - A$ ist nicht injektiv oder nicht surjektiv, da $\mu \in \sigma(A)$. daraus folgt $p(\mu)\mathrm{Id}_X - p(A)$ ist nicht injektiv oder nicht surjektiv, d.h. $p(\mu)\mathrm{Id}_X - p(A)$ ist nicht invertierbar. Also ist $p(\mu) \in \sigma(p(A))$.
"$\subseteq$": Sei $\mu \in \sigma(p(A))$. Wähle nun die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ vom Polynom $\lambda \mapsto \mu - p(\lambda)$, d.h.

$$\mu - p(\lambda) = a\, (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)\,,\ a \neq 0$$

Erneut ergeben die Linearität und die Multiplikativität des Kalküls:

$$\mu\mathrm{Id}_X - p(A) = a\, (A - \lambda_1\mathrm{Id}_X) \ldots (A - \lambda_m\mathrm{Id}_X)\,.$$

Angenommen wir hätten für alle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \notin \sigma(A)$, dann können wir invertieren und erhalten

$$(A - \lambda_m\mathrm{Id}_X)^{-1} \ldots (A - \lambda_1\mathrm{Id}_X)^{-1}\, a^{-1} = (\mu\mathrm{Id}_X - p(A))^{-1}\,,$$

d.h. $\mu \in \rho\,(p(A))$, was ein Widerspruch zu $\mu \in \sigma(p(A))$ ist. Also wählen wir einen Index $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\lambda_{j_0} \in \sigma(A)$. Per Wahl der λ_j's ist $\mu - p\,(\lambda_{j_0}) = 0$, also folgt damit

$$\mu = p\,(\lambda_{j_0}) \in p(\sigma(A)).$$

$\square$

Definition: (Kalkül für Potenzreihen) Sei $f(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und Koeffizienten $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$. Zu einem Operator $A \in L(X)$ mit Spektralradius $r(A) < R$ definieren wir

$$f(A) := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right) =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \text{ in } L(X).$$

Bemerkung: (Wohldefiniertheit) Dies ist wohldefiniert, da die Reihe in $L(X)$ absolut konvergiert, denn wir bekommen per Submultiplikativität von $\limsup$ und der Wahl des Operators A

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \left\|a_k A^k\right\|_{L(X)}^{\frac{1}{k}} &= \limsup_{k\to\infty} \left(|a_k|^{\frac{1}{k}} \cdot \left\|A^k\right\|_{L(X)}^{\frac{1}{k}}\right) \leq \left(\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}\right) \cdot \left(\limsup_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|_{L(X)}^{\frac{1}{k}}\right) \\ &= \frac{1}{R} r(A) < 1.\end{aligned}$$

Satz: (Eigenschaften des Kalküls für Potenzreihen) Seien f_1, f_2, f drei Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_1, R_2 > 0$ bzw. $R > 0$, sowie $A \in L(X)$ mit $r(A) < \min\{R_1, R_2, R\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

- Linearität: $(\alpha f_1 + \beta f_2)\,(A) = \alpha f_1(A) + \beta f_2(A)$.
- Multiplikativität: $(f_1 \cdot f_2)\,(A) = f_1(A) f_2(A) = f_2(A) f_1(A) = (f_2 \cdot f_1)\,(A)$.
- Dualität: $f(A)' = \overline{f}\,(A')$.
- Spektrale Abbildungseigenschaft: $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Der Beweis der Linearität und der Dualität geht einfach per Definition, die der Multiplikativität folgt aus dem Cauchy-Produkt für Reihen. Nur die Spektrale Abbildungseigenschaft benötigt einen etwas größeren Beweis. Den obigen Satz kann man auch noch allgemeiner fassen (nicht nur für Potenzreihen, sondern für allgemeine holomorphe Funktionen), aber dies wollen wir hier nicht weiter betrachten.