18.06.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Einiges zum stetigen Funktionalkalkül)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbst-adjungiert. Zeigen bzw. bestimmen Sie

(i) Ist $\sigma(T) = \{0, 1\}$, dann ist T eine Orthogonalprojektion.

(ii) $\left\|TR(\lambda, T)^2\right\|_{L(H)}$ für $\lambda \in \rho(T)$.

(iii) $\left\|T\mathrm{e}^{-sT^2}\right\|_{L(H)}$ für $s \geq 0$.

(iv) $\left\|(\mathrm{Id}_H + sT)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}sT}\right\|_{L(H)}$ für $s \geq 0$, falls $\sigma(T) \subseteq (0, \infty)$ ist.

Aufgabe 2 (Euler Formel)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum und $U \in L(H)$ unitär. Zeigen Sie, dass es einen selbst-adjungierten Operator $A \in L(H)$ mit $\sigma(A) \subseteq [-\pi, \pi]$ und

$$U = \mathrm{e}^{iA} = \cos(A) + \mathrm{i}\sin(A)$$

gibt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für zwei kommutierenden Operatoren T und W, d.h. $T, W \in L(H)$ mit $TW = WT$, und zusätzlich $T^2 = W^2$, stets folgt, dass W von der Form $W = (2P - \mathrm{Id}_H)T$ ist, wobei P die Orthogonalprojektion auf der Kern $\ker(W - T)$ ist.