18.06.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Spektraltheorie

9. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Einiges zum stetigen Funktionalkalkül)

Seien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbst-adjungiert. Zeigen bzw. bestimmen Sie

(i) Ist $\sigma(T) = \{0, 1\}$, dann ist T eine Orthogonalprojektion.

(ii) $\left\| TR(\lambda, T)^2 \right\|_{L(H)}$ für $\lambda \in \rho(T)$.

(iii) $\left\| T\mathrm{e}^{-sT^2} \right\|_{L(H)}$ für $s \geq 0$.

(iv) $\left\| (\mathrm{Id}_H + sT)^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}sT} \right\|_{L(H)}$ für $s \geq 0$, falls $\sigma(T) \subseteq (0, \infty)$ ist.

Lösung von Aufgabe 1

(i) Es gilt nach dem Funktionalkalkül:

$$\left\| T^2 - T \right\|_{L(H)} = \left\| \left((\cdot)^2 - (\cdot) \right)(T) \right\|_{L(H)} = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \left| \lambda^2 - \lambda \right| = \sup_{\lambda \in \{0,1\}} |\lambda| \, |\lambda - 1| = 0,$$

d.h. $T^2 = T$ auf H und damit ist T eine Projektion. Weiter gilt, dass $\ker(T^*) \perp \mathrm{range}(T)$ ist und da T selbst-adjungiert, also $T^* = T$ ist, gilt nun $\ker(T) = \ker(T^*) \perp \mathrm{range}(T)$. Sei nun $z \in \mathrm{range}(T)^\perp \subseteq H$, dann gilt für alle $x \in H$:

$$\langle Tz, x \rangle_H = \langle z, T^* x \rangle_H = \langle z, Tx \rangle_H = 0,$$

d.h. für $x = Tz \in H$ gilt nun:

$$\|Tz\|_H = \sqrt{\langle Tz, Tz \rangle_H} = 0$$

und damit $Tz = 0$ bzw. $z \in \ker(T)$. Also ist

$$H = \mathrm{range}(T) \oplus \ker(T)$$

und T ist somit eine Orthogonalprojektion auf $\mathrm{range}(T)$.
(ii) Wir setzen zu $\lambda \in \rho(T)$ die Elemente $z^-, z^+ \in \sigma(T)$ mit

$$\begin{aligned} \left| \lambda - z^+ \right| &= d\left(\lambda, \sigma(T)\right), \\ \left| -\lambda - z^- \right| &= d\left(-\lambda, \sigma(T)\right). \end{aligned}$$

Sei nun $\lambda \in \rho(T)$. Dann unterscheiden wir drei Fälle:
Fall 1. $\lambda = 0$:
So gilt nach der Resolventengleichung

$$TR(\mu, T) = -\mathrm{Id}_H + \mu R(\mu, T) \text{ auf } H \text{ für alle } \mu \in \rho(T).$$

Also folgt für $\mu = \lambda = 0$:

$$TR(0, T)^2 = TR(0, T)R(0, T) = -\mathrm{Id}_H R(0, T) = -R(0, T) \text{ auf } H.$$

Also haben wir nach dem Funktionalkalkül:

$$\left\| TR(0, T)^2 \right\|_{L(H)} = \|-R(0, T)\|_{L(H)} = \|R(0, T)\|_{L(H)} = \frac{1}{d(0, \sigma(T))}.$$

Für die weiteren Fälle setzen wir die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{\lambda\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{(\lambda - x)^2}.$$

die Funktion f ist stetig differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \frac{(\lambda-x)^2 + 2(\lambda-x)x}{(\lambda-x)^4} = \frac{(\lambda-x)\left((\lambda-x)+2x\right)}{(\lambda-x)^4} = \frac{\lambda+x}{(\lambda-x)^3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{\lambda\}$. Weiter ist

$$\frac{\lambda+x}{(\lambda-x)^3} = f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda + x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = -\lambda.$$

Zudem ist

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{|\lambda-x|^2} = 0,$$
$$\lim_{x\to\lambda} |f(x)| = \lim_{x\to\lambda} \frac{|x|}{|\lambda-x|^2} = +\infty,$$

d.h. die Funktion $|f|$ hat bei $x_0 = -\lambda$ ein lokales Maximum mit

$$|f(-\lambda)| = \frac{|-\lambda|}{|\lambda-(-\lambda)|^2} = \frac{|\lambda|}{4\lambda^2} = \frac{1}{4|\lambda|}$$

und fällt bei unendlich ab, sowie wächst ins unendliche bei $x_1 = \lambda$. Also ergeben sich nun die anderen zwei Fälle daraus, da

$$\Phi(f) = f(T) = TR(\lambda, T)^2$$

ist.
Fall 2. $\lambda \neq 0,\ -\lambda \notin \rho(T)$:
Es gilt nun nach dem Funktionalkalkül:

$$\left\|TR(\lambda,T)^2\right\|_{L(H)} = \|\Phi(f)\|_{L(H)} = \sup_{z\in\sigma(T)} |f(z)| = \max\left\{\frac{1}{4|\lambda|},\ \frac{|z^+|}{|\lambda - z^+|^2}\right\}.$$

Fall 3. $\lambda \neq 0,\ -\lambda \in \rho(T)$:
Es gilt nun nach dem Funktionalkalkül:

$$\left\|TR(\lambda,T)^2\right\|_{L(H)} = \|\Phi(f)\|_{L(H)} = \sup_{z\in\sigma(T)} |f(z)| = \max\left\{\frac{|z^-|}{|\lambda - z^-|^2},\ \frac{|z^+|}{|\lambda - z^+|^2}\right\}.$$

(iii) Setze zu $s > 0$ die Elemente $z^-, z^+ \in \sigma(T)$ mit

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2s}} - z^+\right| = d\left(\frac{1}{\sqrt{2s}}, \sigma(T)\right),$$
$$\left|-\frac{1}{\sqrt{2s}} - z^-\right| = d\left(-\frac{1}{\sqrt{2s}}, \sigma(T)\right).$$

Wir unterscheiden erneut drei Fälle.
Fall 1. $s = 0$:
Dann ist

$$Te^{-sT^2} = T.$$

Und damit nach dem Funktionalkalkül:

$$\left\|Te^{-0T^2}\right\|_{L(H)} = \|T\|_{L(H)} = \sup_{z\in\sigma(T)} |z| = r(T).$$

Sei nun $s > 0$. Wir setzen die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\mathrm{e}^{-sx^2}.$$

Dann ist die Funktion f stetig differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-sx^2} - 2sx\mathrm{e}^{-sx^2} = \left(1 - 2sx^2\right)\mathrm{e}^{-sx^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2s}} - x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2s}} + x\right)\mathrm{e}^{-sx^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2s}} - x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2s}} + x\right)\mathrm{e}^{-sx^2} = f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{\sqrt{2s}} - x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2s}} + x\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2s}}.$$

Weiter ist

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = \lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{2s}} - x\right| \left|\frac{1}{\sqrt{2s}} + x\right| \mathrm{e}^{-sx^2} = 0,$$

da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom. Also hat die Funktion $|f|$ ein globales Maximum bei $x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2s}}$ mit

$$\left|f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)\right| = \left|\pm\frac{1}{\sqrt{2s}}\right| \mathrm{e}^{-s\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2s}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

Also ergeben sich nun die anderen zwei Fälle daraus, da

$$\Phi(f) = f(T) = T\mathrm{e}^{-sT^2}$$

ist.

Fall 2. $-\frac{1}{\sqrt{2s}} \in \sigma(T)$ oder $\frac{1}{\sqrt{2s}} \in \sigma(T)$:

Es gilt nun nach dem Funktionalkalkül:

$$\left\|T\mathrm{e}^{-sT^2}\right\|_{L(H)} = \|\Phi(f)\|_{L(H)} = \sup_{z\in\sigma(T)} |f(z)| = \frac{1}{\sqrt{2s}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

Fall 3. $\pm\frac{1}{\sqrt{2s}} \in \rho(T)$:

Es gilt nun nach dem Funktionalkalkül:

$$\left\|T\mathrm{e}^{-sT^2}\right\|_{L(H)} = \|\Phi(f)\|_{L(H)} = \sup_{z\in\sigma(T)} |f(z)| = \max\left\{\left|z^-\right| \mathrm{e}^{-s\left(z^-\right)^2},\ \left|z^+\right| \mathrm{e}^{-s\left(z^+\right)^2}\right\}.$$

(iv) Wir unterscheiden hier nur zwei Fälle.

Fall 1. $s = 0$:

Wegen $\sigma(T) \subseteq (0, \infty)$ ist $0 \in \rho(T)$. Es gilt:

$$(\mathrm{Id}_H + sT)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}sT} = \mathrm{Id}_H^{-1} = \mathrm{Id}_H.$$

Also haben wir:

$$\left\|(\mathrm{Id}_H + 0T)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0T}\right\|_{L(H)} = \|\mathrm{Id}_H\|_{L(H)} = 1.$$

Fall 2. $s > 0$:

Es gilt wegen $\sigma(T) \subseteq (0, \infty)$, dass $-\frac{1}{s} \in \rho(T)$ ist. Daher gilt:

$$(\mathrm{Id}_H + sT)^{-1} = -\frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s} - T\right)^{-1} = -\frac{1}{s}R\left(-\frac{1}{s}, T\right).$$

Und damit ist

$$(\mathrm{Id}_H + sT)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}sT} = -\frac{1}{s}R\left(-\frac{1}{s}, T\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sT}.$$

Nun setzen wir die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{s}\right\} \to \mathbb{C},\ x \mapsto -\frac{1}{s}\frac{1}{-\frac{1}{s} - x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}.$$

Damit ist die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{s}\right\}$ und es gilt für den Betrag:

$$|f(x)| = \left|-\frac{1}{s}\right| \left|\frac{1}{-\frac{1}{s} - x}\right| \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\right| = \frac{1}{s}\left|\frac{1}{-\frac{1}{s} - x}\right|$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{s}\right\}$. Somit folgt mit dem Funktionalkalkül wegen

$$\Phi(f) = f(T) = -\frac{1}{s}R\left(-\frac{1}{s}, T\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sT} = (\mathrm{Id}_H + sT)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx},$$

dass gilt:

$$\begin{aligned}\left\|(\mathrm{Id}_H + sT)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\right\|_{L(H)} &= \|\Phi(f)\|_{L(H)} = \sup_{z\in\sigma(T)} |f(z)| = \sup_{z\in\sigma(T)} \frac{1}{s}\left|\frac{1}{-\frac{1}{s} - z}\right| \\ &= \frac{1}{s}\sup_{z\in\sigma(T)} \frac{1}{\left|-\frac{1}{s} - z\right|} = \frac{1}{s}\frac{1}{\inf\limits_{z\in\sigma(T)}\left|-\frac{1}{s} - z\right|} = \frac{1}{s}\frac{1}{d\left(-\frac{1}{s}, \sigma(T)\right)}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Euler Formel)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum und $U \in L(H)$ unitär. Zeigen Sie, dass es einen selbst-adjungierten Operator $A \in L(H)$ mit $\sigma(A) \subseteq [-\pi, \pi]$ und

$$U = \mathrm{e}^{iA} = \cos(A) + \mathrm{i}\sin(A)$$

gibt.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für zwei kommutierenden Operatoren T und W, d.h. $T, W \in L(H)$ mit $TW = WT$, und zusätzlich $T^2 = W^2$, stets folgt, dass W von der Form $W = (2P - \mathrm{Id}_H)T$ ist, wobei P die Orthogonalprojektion auf der Kern $\ker(W - T)$ ist.

Lösung von Aufgabe 2

Motivation:
Identifizieren wir nun "$z = U$", $z \in \mathbb{C}$, so ist

$$\text{"}U \text{ unitär } \Leftrightarrow |z| = 1,\text{"}$$

mit "$\overline{z} = U^*$". Weiter haben wir für $|z| = 1$:

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi) \text{ mit Winkel } \varphi = \arg(z) = \operatorname{sign}(\Im(z)) \arccos(\Re(z)).$$

Weiter gilt wegen $1 = |z|^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$:

$$\begin{aligned}|\Im(z)| &= \sqrt{\Im(z)^2} = \sqrt{1 - \Re(z)^2} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(\Re(z)))} = \sqrt{\sin^2(\arccos(\Re(z)))} \\ &= \sin(\arccos(\Re(z))),\end{aligned}$$

da $\sin(x) \geq 0$ ist für $x \in [0, \pi]$.

Problem:

- Es gibt keinen messbaren Funktionalkalkül für unitäre Operatoren.
- Die beiden Operatoren "$\Im(U)$" und "$\Re(U)$" sind zwar selbst-adjungiert, aber zwei verschiedene Operatoren.

Lemma: (Eigenschaften von Projektionen) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum, $T \in L(H)$ ein Operator, $G \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum von H, sowie P eine Orthogonalprojektion auf G. Dann ist:

(a)
$$T(G) \subseteq G \Leftrightarrow PTP = TP.$$

(b)
$$T(G) \subseteq G \text{ und } T\left(G^\perp\right) \subseteq G^\perp \Leftrightarrow TP = PT \text{ auf } H \Leftrightarrow T(G) \subseteq G \text{ und } T^*(G) \subseteq G.$$

Beweis: (a) Wir haben hier die Äquivalenz:

$$\begin{aligned}T(G) \subseteq G &\Leftrightarrow \text{Für alle } y \in T(G) \text{ ist } y \in G = \operatorname{range}(P) = \ker(\mathrm{Id}_H - P). \\ &\Leftrightarrow \text{Für alle } y \in T(G) \text{ ist } Py = y. \\ &\Leftrightarrow \text{Für alle } y \in T(\operatorname{range}(P)) \text{ ist } Py = y. \\ &\Leftrightarrow \text{Für alle } x \in H \text{ ist } PTPx = TPx.\end{aligned}$$

(b) Da P eine Orthogonalprojektion auf G ist, gilt:

$$\operatorname{range}(\mathrm{Id}_H - P) = \ker(P) \perp \operatorname{range}(P) = \ker(\mathrm{Id}_H - P) = G.$$

Also ist $\mathrm{Id}_H - P$ eine Orthogonalprojektion auf $G^\perp \subseteq H$. Mit (a) folgt nun:

$$\begin{aligned}T\left(G^\perp\right) \subseteq G^\perp &\Leftrightarrow T - PT - TP + PTP = (\mathrm{Id}_H - P)T(\mathrm{Id}_H - P) = T(\mathrm{Id}_H - P) = T - TP \\ &\Leftrightarrow PTP = PT.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$T(G) \subseteq G \text{ und } T\left(G^\perp\right) \subseteq G^\perp \Leftrightarrow TP = PTP = PT.$$

Projektionen sind insbesondere selbst-adjungiert, also folgt damit und nach (a):

$$\begin{aligned} T^*(G) \subseteq G \;&\Leftrightarrow\; PT^*P = T^*P \\ &\Leftrightarrow\; PTP = (PT^*P)^* = (T^*P)^* = PT \\ &\Leftrightarrow\; T\left(G^\perp\right) \subseteq G^\perp. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Lemma:
Seien $T, W\colon H \to H$ zwei selbst-adjungierte Operatoren mit $TW = WT$ und $T^2 = W^2$ auf H, sowie P die Orthogonalprojektion auf den Kern $\ker(W_T)$. Dann gilt:

(i) Ist $S \in L(H)$ ein weiterer Operator, welcher mit $W - T$ kommutiert, d.h. $S(W-T) = (W-T)S$ auf H, dann kommutiert auch S mit P, d.h. $SP = PS$ auf H. Insbesondere kommutiert auch P mit W und T.

(ii) Es gilt die Darstellung:
$$W = (2P - \mathrm{Id}_H)\, T \text{ auf } H.$$
Insbesondere haben wir somit:
$$W = T \text{ auf } \operatorname{range}(P) \text{ und } W = -T \text{ auf } \ker(P).$$

Beweis: (i) Sei nun $S \in L(H)$ ein Operator, welcher mit $W - T$ kommutiert. So ist $W - T$ selbst-adjungiert, wegen

$$(W-T)^* = W^* - T^* = W - T,$$

da W und T selbst-adjungiert sind. Dadurch kommutiert S^* mit $(W-T)^* = W - T$, wegen

$$\begin{aligned} \langle S^*(W-T)x, y\rangle_H &= \overline{\langle y, S^*(W-T)x\rangle_H} = \overline{\langle Sy, (W-T)x\rangle_H} = \overline{\langle (W-T)^*Sy, x\rangle_H} \\ &= \overline{\langle (W-T)Sy, x\rangle_H} = \overline{\langle S(W-T)y, x\rangle_H} = \overline{\langle (W-T)y, S^*x\rangle_H} \\ &= \overline{\langle y, (W-T)^*S^*x\rangle_H} = \overline{\langle y, (W-T)S^*x\rangle_H} = \langle (W-T)S^*x, y\rangle_H \end{aligned}$$

für alle $x, y \in H$. Nun gilt für alle $x \in \ker(W-T)$, da S mit $W - T$ kommutiert:

$$\begin{aligned} (W-T)Sx = S(W-T)x = S0 = 0, \\ (W-T)S^*x = S^*(W-T)x = S^*0 = 0, \end{aligned}$$

d.h. $S\ker(W-T) \subseteq \ker(W-T)$ und $S^*\ker(W-T) \subseteq \ker(W-T)$. Dann folgt nach dem obigen Lemma (b):

$$PS = SP \text{ auf } H.$$

Insbesondere gilt, da T und W miteinander kommutieren:

$$\begin{aligned} W(W-T) = W^2 - WT = WW - TW = (W-T)W \text{ auf } H, \\ T(W-T) = TW - T^2 = WT - TT = (W-T)T \text{ auf } H. \end{aligned}$$

Demnach folgt:
$$PW = WP \text{ und } PT = TP \text{ auf } H.$$

(ii) Wegen $T^2 = W^2$ auf H und da T mit W kommutiert, haben wir:

$$(W-T)(W+T) = W^2 - TW + WT - T^2 = T^2 - WT + WT - T^2 = 0,$$

woraus sich
$$\operatorname{range}(W+T) \subseteq \ker(W-T) = \operatorname{range}(P)$$
ergibt. Da P eine Orthogonalprojektion auf $\ker(W-T)$ ist, folgt damit

$$P(W+T) = W + T \text{ auf } H.$$

Zusätzlich kommutiert $W - T$ mit sich selber, also nach (i) auch

$$P(W-T)x = (W-T)Px = 0 \text{ für alle } x \in H,$$

d.h. $P(W-T) = 0$ auf H. Nun ergibt sich auf H:

$$W + T = P(W+T) = P(W+T) - 0 = PW + PT - P(W-T) = PW + PT - PW + PT = 2PT$$

$$\Leftrightarrow\; W = 2PT - T = (2P - \mathrm{Id}_H)\,T.$$

Insbsondere haben wir wegen $TP = PT$ auf H:

$$\begin{aligned}
Wx &= (2PT-T)x = (2TP-T)x = T\,(2P-\mathrm{Id}_H)\,x = T\,(2Px - x) = T\,(2x-x) = Tx \text{ für alle } x \in \mathrm{range}(P),\\
Wy &= (2PT-T)y = (2TP-T)y = T\,(2P-\mathrm{Id}_H)\,y = T\,(2Py - y) = -Ty \text{ für alle } y \in \ker(P).
\end{aligned}$$

Beweis von der Aufgabe 2.: Setze

$$V := \frac{1}{2}\,(U+U^*) = \text{"}\Re(U)\text{" und } W := \frac{1}{2\mathrm{i}}\,(U-U^*) = \text{"}\Im(U)\text{"}.$$

V, W sind selbst-adjungiert und kommutieren miteinander:

$$\begin{aligned}
V^* &= \left[\frac{1}{2}\,(U+U^*)\right]^* = \overline{\frac{1}{2}}\,(U^*+U^{**}) = \frac{1}{2}\,(U^*+U) = \frac{1}{2}\,(U+U^*) = V,\\
W^* &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\,(U-U^*)\right]^* = \overline{\frac{1}{2\mathrm{i}}}\,(U^*-U^{**}) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\,(U^*-U) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,(U-U^*) = W,\\
VW &= \left[\frac{1}{2}\,(U+U^*)\right]\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\,(U-U^*)\right] = \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(U^2 + U^*U - UU^* - (U^*)^2\right) = \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(U^2 + \mathrm{Id}_H - \mathrm{Id}_H - (U^*)^2\right)\\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(U^2 - (U^*)^2\right) = \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(U^2 + \mathrm{Id}_H - \mathrm{Id}_H\,(U^*)^2\right) = \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(U^2 + UU^* - U^*U - (U^*)^2\right)\\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}\,(U-U^*)\,(U+U^*) = \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\,(U-U^*)\right]\left[\frac{1}{2}\,(U+U^*)\right] = WV,
\end{aligned}$$

da $U^{**} := (U^*)^* = U$ und $UU^* = U^*U = \mathrm{Id}_H$ auf H ist (U ist unitär).
Darstellung von U und U^*: Es gilt auf H:

$$\begin{aligned}
V + \mathrm{i}W &= \frac{1}{2}\,(U+U^*) + \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\,(U-U^*) = \frac{1}{2}\,(U+U^*+U-U^*) = \frac{2}{2}U = U,\\
V - \mathrm{i}W &= \frac{1}{2}\,(U+U^*) - \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\,(U-U^*) = \frac{1}{2}\,(U+U^*-(U-U^*)) = \frac{1}{2}\,(U+U^*-U+U^*) = \frac{2}{2}U^* = U^*.
\end{aligned}$$

"$|z|=1$": Es gilt auf H, da U unitär ist:

$$\begin{aligned}
V^2 + W^2 &= \left[\frac{1}{2}\,(U+U^*)\right]^2 + \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\,(U-U^*)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(U^2 + UU^* + U^*U + (U^*)^2\right) - \frac{1}{4}\left(U^2 - UU^* - U^*U + (U^*)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(U^2 + \mathrm{Id}_H + \mathrm{Id}_H - (U^*)^2 - \left(U^2 - \mathrm{Id}_H - \mathrm{Id}_H + (U^*)^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(U^2 + 2\mathrm{Id}_H + (U^*)^2 - U^2 + 2\mathrm{Id}_H - (U^*)^2\right) = \frac{4}{4}\mathrm{Id}_H = \mathrm{Id}_H.
\end{aligned}$$

Beschränktheit von V und W: Es sind:

$$\begin{aligned}
\|V\|_{L(H)} &= \left\|\frac{1}{2}\,(U+U^*)\right\|_{L(H)} \le \frac{1}{2}\left(\|U\|_{L(H)} + \|U^*\|_{L(H)}\right) = \frac{1}{2}\,(1+1) = 1,\\
\|W\|_{L(H)} &= \left\|\frac{1}{2\mathrm{i}}\,(U-U^*)\right\|_{L(H)} \le \frac{1}{2}\left(\|U\|_{L(H)} + \|U^*\|_{L(H)}\right) = \frac{1}{2}\,(1+1) = 1,
\end{aligned}$$

da U unitär ist und damit ist $\|U\|_{L(H)} = \|U^*\|_{L(H)} = 1$. Also sind $V, W \in L(H)$ selbst-adjungierte miteinander kommutierenden Operatoren.
Operator T fürs obere Lemma: Also haben wir insbesondere:

$$\sigma(V) \subseteq [-1,1] \text{ und } \sigma(W) \subseteq [-1,1].$$

Damit können wir nun mithilfe des Funktionalkalküls den selbst-adjungierten Operator

$$T := \sin(\arccos(V)) = \text{"}\Im(U)\text{"}$$

definieren. Da V und W miteinander kommutieren, folgt nach dem Funktionalkalkül, dass auch T mit W kommutiert. Zudem berechnen wir mit dem Funktionalkalkül:

$$T^2 = \sin(\arccos(V))\sin(\arccos(V)) = (\sin(\arccos(\cdot))\sin(\arccos(\cdot))]\,(V) = \left[\sin^2(\arccos(\cdot))\right](V)$$

$$= \left[1 - \cos^2(\arccos(\cdot))\right](V) = \left[1 - (\cdot)^2\right](V) = \mathrm{Id}_H - V^2 = W^2.$$

Sei nun P die Orthogonalprojektion auf den Kern $\ker(W - T)$. Dann folgt nach dem obigen Lemma (ii):

$$W = (2P - \mathrm{Id}_H)\, T \text{ auf } H.$$

Da V mit W und T kommutiert, kommutiert V auch mit $W - T$ auf H, denn es ist:

$$V(W - T) = VW - VT = WV - TV = (W - T)V,$$

und nach dem obigen Lemma (i) kommutiert nun auch V mit P.
Definition von A: Setze nun

$$A := (2P - \mathrm{Id}_H) \arccos(V) \text{ auf } H.$$

Dann ist A nach dem Funktionalkalkül selbst-adjungiert, und es gilt:

$$\begin{aligned}
A^2 &= (2P - \mathrm{Id}_H) \arccos(V)^2 = \left(4P^2 - 2P\mathrm{Id}_H - 2\mathrm{Id}_H P + \mathrm{Id}_H^2\right) \arccos(V)^2 = (4P - 2P - 2P + \mathrm{Id}_H) \arccos(V)^2 \\
&= \mathrm{Id}_H \arccos(V)^2 = \arccos(V)^2 \text{ auf } H, \\
\|A\|_{L(H)}^2 &= \sup_{x \in H,\ \|x\|_H \leq 1} \langle Ax, Ax \rangle_H = \sup_{x \in H,\ \|x\|_H \leq 1} \left\langle A^2 x, x \right\rangle_H \\
&= \left\|A^2\right\|_{L(H)} = \left\|\arccos(V)^2\right\|_{L(H)} = \sup_{x \in H,\ \|x\|_H \leq 1} \left\langle \arccos(V)^2 x, x \right\rangle_H \\
&= \sup_{x \in H,\ \|x\|_H \leq 1} \langle \arccos(V)x, \arccos(V)x \rangle_H = \|\arccos(V)\|_{L(H)}^2 = \left(\max_{x \in \sigma(V)} |\arccos(x)|\right)^2 \\
&\leq \pi^2
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Hahn-Banach, d.h. $\|A\|_{L(H)} \leq \pi$ und somit ist

$$\sigma(A) \subseteq [-\pi, \pi].$$

Beweis der Euler-Formel: Weiter gilt nach den Reihendarstellungen von Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned}
\sin(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k} = (2P - \mathrm{Id}_H) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \arccos(V)^{2k} \\
&= (2P - \mathrm{Id}_H) \sin(\arccos(V)) = (2P - \mathrm{Id}_H)\, T = W, \\
\cos(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \arccos(V)^{2k} = \cos(\arccos(V)) = V.
\end{aligned}$$

Demnach haben wir:

$$U = V + \mathrm{i}W = \cos(A) + \mathrm{i}\sin(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}A}.$$

□