

## Spektraltheorie

### 10. Übungsblatt

Für die Aufgaben 1 und 2 sei  $S \in \mathcal{L}(H)$  ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum  $H$  und  $\Psi : \mathcal{B}_b(\sigma(S)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$  der zugehörige Funktionalkalkül.

#### Aufgabe 1

Zeigen Sie für jedes  $\lambda \in \sigma(S)$ :

$$\lambda \notin \sigma_p(S) \iff \Psi(1_{\{\lambda\}}) = 0.$$

Zeigen Sie für jedes  $\lambda \in \sigma_p(S)$ , dass  $\Psi(1_{\{\lambda\}})$  die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum von  $S$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist.

#### Aufgabe 2

Sei  $T \in \mathcal{L}(H)$  mit  $ST = TS$ . Zeigen Sie, dass gilt

$$\Psi(f)T = T\Psi(f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S)).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst Polynome  $f$  und dann stetige Funktionen  $f$ . Verwenden Sie schließlich Lemma 5.2.

#### Aufgabe 3

Sei  $H = L^2(0, 1)$  und  $A := i \frac{d}{dx}$  mit

$$D(A) = \{\varphi \in C^1([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass der Operator  $A$  symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert ist. Was lässt sich über Fredholmigenschaften von Operatoren  $z - \bar{A}$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  sagen?