04.07.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

10. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Spektralprojektionen)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum, $S \in L(H)$ selbst-adjungiert, sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Äquivalenz

$$\lambda \notin \sigma_p(S) \;\Leftrightarrow\; \psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right) = 0 \text{ auf } H$$

gilt, wobei $\psi\colon \mathcal{B}_b(\sigma(S)) \to L(H)$ der zugehörige Funktionalkalkül ist. Zeigen Sie dazu, dass für Eigenwerte $\lambda \in \sigma_p(S)$ der Operator $\psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)$ eine Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $E_\lambda := \ker(\lambda \mathrm{Id}_H - S)$ zum Eigenwert λ ist. Wir bezeichnen hierbei mit χ_M, M eine Menge, die Indikatorfunktion zur Menge M, d.h.

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in M \\ 0, & \text{für } x \notin M \end{cases} .$$

Lösung von Aufgabe 1

Wir zeigen erst das folgende Lemma, welches uns erlaubt den Funktionalkalkül an Eigenfunktionen auszuwerten:
Lemma: Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum, $S \in L(H)$ selbst-adjungiert und $\lambda \in \sigma_p(S)$. Dann gilt:

$$\psi(f)x = f(\lambda)x \text{ für alle } f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S)),\; x \in E_\lambda := \ker(\lambda \mathrm{Id}_H - S).$$

Beweis (über strukturelle Induktion): Sei $x \in E_\lambda \backslash \{0\}$ beliebig, dann gilt: $Sx = \lambda x$.
m **Monom vom Grad** $n \in \mathbb{N}_0$: Es gilt:

$$\psi(m)x = m(S)x = S^n x = \lambda^n x = m(\lambda)x.$$

p **Polynom vom Grad** $n \in \mathbb{N}_0$: Es gilt wegen der Linearität von ψ und dem obigen:

$$\begin{aligned}\psi(p)x &= \psi\left(\sum_{i=0}^n a_i (\cdot)^i\right) x = \sum_{i=0}^n a_i \psi\left((\cdot)^i\right) x = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i x \\ &= p(\lambda)x.\end{aligned}$$

f **stetig auf** $\sigma(S)$: Wähle nach dem Approximationssatz von Weierstraß eine Folge von Polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{C^0(\sigma(S))} = 0.$$

Dann wissen wir, dass die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert, denn

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in\sigma(S)} |p_n(\mu) - f(\mu)| = \lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{C^0(\sigma(S))} = 0$$

für alle $x \in \sigma(S)$, und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt, da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Also ist die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σ-konvergent gegen f. Daraus und aus dem obigen folgt für alle $y \in H$:

$$\begin{aligned}\langle \psi(f)x - f(\lambda)x, y\rangle_H &= \langle (\psi(f) - \psi(p_n))\, x + (\psi(p_n) - f(\lambda))\, x, y\rangle_H = \langle (\psi(f) - \psi(p_n))\, x, y\rangle_H + \langle (p_n(\lambda) - f(\lambda))\, x, y\rangle_H \\ &= \langle (\psi(f) - \psi(p_n))\, x, y\rangle_H + (p_n(\lambda) - f(\lambda)) \langle x, y\rangle_H \\ &\to 0 + 0\langle x, y\rangle_H = 0 \text{ für } n \to \infty,\end{aligned}$$

da ψ eine σ-stetige Abbildung ist. Daher ist

$$\psi(f)x = f(\lambda)x.$$

$f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$: Setze die Menge

$$M := \{g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S)) \colon \psi(g)x = g(\lambda)x\} \subseteq \mathcal{B}_b(\sigma(S)).$$

Dann haben wir bisher gezeigt: $C^0(\sigma(S)) \subseteq M$, d.h. insbesondere $M \neq \emptyset$. Sei nun $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ eine σ-konvergente Folge gegen eine Funktion $g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$. Dann folgt, da $g_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, diese insbesondere punktweise gegen g konvergieren für $n \to \infty$ und ψ σ-stetig ist:

$$\begin{aligned}\langle\psi(g)x - g(\lambda)x, y\rangle_H &= \langle(\psi(g) - \psi(g_n))\,x + (\psi(g_n) - g(\lambda))\,x, y\rangle_H = \langle(\psi(g) - \psi(g_n))\,x, y\rangle_H + \langle(g_n(\lambda) - g(\lambda))\,x, y\rangle_H \\ &= \langle(\psi(g) - \psi(g_n))\,x, y\rangle_H + (g_n(\lambda) - g(\lambda))\,\langle x, y\rangle_H \\ &\to 0 + 0\langle x, y\rangle_H = 0 \text{ für } n \to \infty,\end{aligned}$$

d.h. es ist

$$\psi(g)x = g(\lambda)x$$

und damit ist $g \in M$ und M ist abgeschlossen bzgl. σ-Konvergenz. Laut Vorlesung folgt nun, dass

$$\mathcal{B}_b(\sigma(S)) \subseteq M \subseteq \mathcal{B}_b(\sigma(S))$$

ist, d.h. $M = \mathcal{B}_b(\sigma(S))$. Und wir haben

$$\psi(f)x = f(\lambda)x.$$

□

Beweis von Aufgabe 1.: Wir zeigen zuerst, dass der Operator $\psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)$ die Orthogonalprojektion auf E_λ ist. Wegen der Linearität und der Multiplikativität von ψ haben wir die Projektionseigenschaft:

$$\psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)\psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right) = \psi\left(\chi_{\{\lambda\}} \cdot \chi_{\{\lambda\}}\right) = \psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)$$

und

$$S\psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)z = \psi\left(\mathrm{Id}_{\sigma(S)}\right)\psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)z = \psi\left(\mathrm{Id}_{\sigma(S)} \cdot \chi_{\{\lambda\}}\right)z = \psi\left(\lambda\chi_{\{\lambda\}}\right)z = \lambda\psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)z$$

für alle $z \in H$, d.h.

$$\mathrm{range}\left(\psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)\right) \subseteq E_\lambda.$$

Die Orthogonalität folgt ebenfalls aus der Linearität und der Selbst-Adjungiertheit von ψ, sowie dem obigen Lemma:

$$\begin{aligned}\left\langle z - \psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)z, x\right\rangle_H &= \left\langle\psi\left(\chi_{\sigma(S)}\right)z - \psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)z, x\right\rangle_H = \left\langle\left(\psi\left(\chi_{\sigma(S)}\right) - \psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)\right)z, x\right\rangle_H \\ &= \left\langle\psi\left(\chi_{\sigma(S)} - \chi_{\{\lambda\}}\right)z, x\right\rangle_H = \left\langle\psi\left(\chi_{\sigma(S)\setminus\{\lambda\}}\right)z, x\right\rangle_H \\ &= \left\langle z, \psi\left(\chi_{\sigma(S)\setminus\{\lambda\}}\right)^* x\right\rangle_H = \left\langle z, \psi\left(\overline{\chi_{\sigma(S)\setminus\{\lambda\}}}\right)x\right\rangle_H \\ &= \left\langle z, \psi\left(\chi_{\sigma(S)\setminus\{\lambda\}}\right)x\right\rangle_H = \left\langle z, \chi_{\sigma(S)\setminus\{\lambda\}}(\lambda)x\right\rangle_H \\ &= \langle z, 0\rangle_H = 0\end{aligned}$$

für alle $z \in H$ und $x \in E_\lambda$. Damit ist $\psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)$ eine Orthogonalprojektion auf den Eigenraum E_λ. Damit gilt für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Äquivalenz:

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_p(S) &\Leftrightarrow \text{ es gibt ein Element } x \in H\setminus\{0\} \text{ mit } Sx = \lambda x \\ &\Leftrightarrow \text{ es gibt ein Element } x \in H\setminus\{0\} \text{ mit } \psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)x = \chi_{\{\lambda\}}(\lambda)x = x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{ es gibt ein Element } z \in H \text{ mit } \psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right)z \neq 0\end{aligned}$$

Damit gilt für $\lambda \in \mathbb{C}$ automatisch die Äquivalenz:

$$\lambda \notin \sigma_p(S) \;\Leftrightarrow\; \psi\left(\chi_{\{\lambda\}}\right) = 0 \text{ auf } H.$$

Dies war zu zeigen. □

Aufgabe 2 (Kommutation überträgt sich auf Funktionalkalkül)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum, $S, T \in L(H)$ mit $ST = TS$ auf H und S sei zusätzlich selbst-adjungiert. Beweisen Sie, dass

$$\psi(f)T = T\psi(f) \text{ für alle } f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$$

gilt, wobei $\psi\colon \mathcal{B}_b(\sigma(S)) \to L(H)$ der zugehörige Funktionalkalkül ist.
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage erst für Polynome und stetige Funktionen und wenden Sie anschließend Lemma 5.2 aus der Vorlesung an.

Lösung von Aufgabe 2

(über strukturelle Induktion)
m **Monom vom Grad** $n \in \mathbb{N}_0$: Es gilt:

$$\psi(m)T = m(S)T = S^n T = TS^n = Tm(S) = T\psi(m) \text{ auf } H.$$

p **Polynom vom Grad** $n \in \mathbb{N}_0$: Es folgt aus der Linearität von ψ und T und dem obigen:

$$\begin{aligned}\psi(p)T &= \psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i (\cdot)^i\right) T = \sum_{i=0}^{n} a_i \psi\left((\cdot)^i\right) T = \sum_{i=0}^{n} a_i T\psi\left((\cdot)^i\right) \\ &= T\left(\sum_{i=0}^{n} \psi\left((\cdot)^i\right)\right) = T\psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i (\cdot)^i\right) = T\psi(p).\end{aligned}$$

f **stetig auf** $\sigma(S)$: Wähle nach dem Approximationssatz von Weierstraß eine Folge von Polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{C^0(\sigma(S))} = 0.$$

Dann wissen wir, dass die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert, denn

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in\sigma(S)} |p_n(\mu) - f(\mu)| = \lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{C^0(\sigma(S))} = 0$$

für alle $x \in \sigma(S)$, und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt, da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Also ist die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σ-konvergent gegen f. Daraus und aus dem obigen und der σ-Stetigkeit von ψ folgt für alle $x, y \in H$:

$$\begin{aligned}\langle(\psi(f)T - T\psi(f))\,x, y\rangle_H &= \langle(\psi(f)T - \psi(p_n)\,T + \psi(p_n)\,T - T\psi(f))\,x, y\rangle_H \\ &= \langle(\psi(f)T - \psi(p_n))\,x, y\rangle_H + \langle(\psi(p_n)\,T - T\psi(f))\,x, y\rangle_H \\ &= \langle(\psi(f)T - \psi(p_n))\,x, y\rangle_H + \langle(T\psi(p_n) - T\psi(f))\,x, y\rangle_H \\ &= \langle(\psi(f)T - \psi(p_n))\,x, y\rangle_H + \langle T\,(\psi(p_n) - \psi(f))\,x, y\rangle_H \\ &= \langle(\psi(f)T - \psi(p_n))\,x, y\rangle_H + \langle(\psi(p_n) - \psi(f))\,x, T^*y\rangle_H \\ &\to 0 + 0 = 0 \text{ für } n \to \infty,\end{aligned}$$

d.h.

$$\psi(f)T = T\psi(f).$$

$f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$: Setze die Menge

$$M := \{g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S)) \colon \psi(g)T = T\psi(g)\} \subseteq \mathcal{B}_b(\sigma(S)).$$

Dann haben wir bisher gezeigt: $C^0(\sigma(S)) \subseteq M$, d.h. insbesondere $M \neq \emptyset$. Sei nun $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ eine σ-konvergente Folge gegen eine Funktion $g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$. Dann folgt, da $g_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und ψ σ-stetig ist:

$$\begin{aligned}\langle(\psi(fgT - T\psi(g))\,x, y\rangle_H &= \langle(\psi(g)T - \psi(g_n)\,T + \psi(g_n)\,T - T\psi(g))\,x, y\rangle_H \\ &= \langle(\psi(g)T - \psi(g_n))\,x, y\rangle_H + \langle(\psi(g_n)\,T - T\psi(g))\,x, y\rangle_H \\ &= \langle(\psi(g)T - \psi(g_n))\,x, y\rangle_H + \langle(T\psi(g_n) - T\psi(g))\,x, y\rangle_H \\ &= \langle(\psi(g)T - \psi(g_n))\,x, y\rangle_H + \langle T\,(\psi(g_n) - \psi(g))\,x, y\rangle_H \\ &= \langle(\psi(g)T - \psi(g_n))\,x, y\rangle_H + \langle(\psi(g_n) - \psi(g))\,x, T^*y\rangle_H \\ &\to 0 + 0 = 0 \text{ für } n \to \infty,\end{aligned}$$

d.h.

$$\psi(g)T = T\psi(g)$$

und damit ist $g \in M$ und M ist abgeschlossen bzgl. σ-Konvergenz. Laut Vorlesung folgt nun, dass

$$\mathcal{B}_b(\sigma(S)) \subseteq M \subseteq \mathcal{B}_b(\sigma(S))$$

ist, d.h. $M = \mathcal{B}_b(\sigma(S))$. Und wir haben

$$\psi(f)T = T\psi(f).$$

$\square$

Aufgabe 3 (Unbeschränkte Fredholm-Operatoren)

Seien $H = L^2(0,1)$ und $A := \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ der Ableitungsoperator mit Definitionsbereich

$$D(A) := \{f \in C^1[0,1] \colon f(0) = f(1) = 0\} =: C_0^1[0,1].$$

Zeigen Sie, dass der Operator A linear und symmetrisch, jedoch nicht selbst-adjungiert ist. Was lässt sich über Fredholmeigenschaften der Operatoren $z - \overline{A}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sagen?

Lösung von Aufgabe 3

A **linear**: Klar.
A **symmetrisch**: Seien $f, g \in D(A)$, dann gilt nach partieller Integration:

$$\begin{aligned}(*)\ \langle Af, g\rangle_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 Af(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{i}f'(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{i}f(x)\overline{g(x)}\Big]_0^1 + \int_0^1 (-\mathrm{i})f(x)\overline{g'(x)}\mathrm{d}x \\ &= \Big(\mathrm{i}f(1)\overline{g(1)} - \mathrm{i}f(0)\overline{g(0)}\Big) + \int_0^1 f(x)\overline{\mathrm{i}g'(x)}\mathrm{d}x = (0-0) + \int_0^1 f(x)\overline{Ag(x)}\mathrm{d}x \\ &= 0 + \langle f, Ag\rangle_{L^2(0,1)} = \langle f, Ag\rangle_{L^2(0,1)}.\end{aligned}$$

A **nicht selbst-adjungiert**: Die Gleichheit in $(*)$

$$\langle Af, g\rangle_{L^2(0,1)} = \left\langle f, \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\right\rangle_{L^2(0,1)}$$

gilt für alle $f \in D(A)$ und $g \in W^{1,2}(0,1)$, und weiter ist $D(A) \subseteq W^{1,2}(0,1)$, aber es ist $D(A) \neq W^{1,2}(0,1)$. Dies bedeutet, dass A nicht selbst-adjungiert sein kann.
Abschluss von A: Symmetrische Operatoren sind abschließbar, also existiert $\overline{A}$ mit

$$\operatorname{graph}\left(\overline{A}\right) = \overline{\operatorname{graph}(A)}.$$

Also ist

$$D\left(\overline{A}\right) = \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(0,1)}} =: W_0^{1,2}(0,1).$$

Ist A symmetrisch, so ist auch sein Abschluss $\overline{A}$ symmetrisch.
$z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}$**,** $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$**, ist ein Fredholm-Operator**: Damit ist $\overline{A}$ ein linearer, dicht-definierter, abgeschlossener und symmetrischer Operator. Nach Vorlesung wissen wir nun, dass für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ der Operator $z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}$ injektiv, sowie das Bild $\operatorname{range}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right) \subseteq L^2(0,1)$ abgeschlossen ist. Also insbesondere ist $\ker\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right) = \{0\}$ und damit

$$\dim\left(\ker\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right)\right) = 0 < \infty \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Kodimension des Bildes ebenfalls endlich-dimensional ist. Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ beliebig. Wir untersuchen erst das Bild von $z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - A$ und schließen danach ab. Seien also $g \in \operatorname{range}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - A\right)$ und $f \in D(A)$ mit

$$zf - \mathrm{i}f' = zf - Af = \left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - A\right)f = g.$$

Lösung der homogenen Gleichung $zf_h - \mathrm{i}f_h' = 0$ *auf* $(0,1)$: Die Gleichung lässt sich umformen zu

$$f_h' = \frac{z}{\mathrm{i}}f_h = -z\mathrm{i}f_h \text{ auf } (0,1).$$

Die Lösungen davon lauten:

$$f_h(x) = c_h\mathrm{e}^{-z\mathrm{i}x} \text{ für } x \in (0,1)$$

mit Konstante $c_h \in \mathbb{C}$.
Lösung der inhomogenen Gleichung $zf - \mathrm{i}f' = g$ *auf* $(0,1)$ Per Ansatz

$$f(x) = C(x)f_h(x),\ x \in (0,1)$$

folgt durch Einsetzen:

$$g(x) = zf(x) - \mathrm{i}f'(x) = zC(x)f_h(x) - \mathrm{i}C'(x)f_h(x) - \mathrm{i}C(x)f_h'(x) = C(x)\left(zf_h(x) - \mathrm{i}f_h'(x)\right) - \mathrm{i}C'(x)f_h(x) = -\mathrm{i}C'(x)f_h(x)$$

für alle $x \in (0,1)$. Dies ist Äquivalent zu

$$C'(x) = -\frac{1}{\mathrm{i}f_h(x)}g(x) = -\frac{1}{c_h\mathrm{i}\mathrm{e}^{-z\mathrm{i}x}}g(x) = \frac{\mathrm{i}}{c_h}g(x)\mathrm{e}^{z\mathrm{i}x}$$

für alle $x \in (0,1)$. Die Lösungen dieser Differentialgleichung lauten:

$$C(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{i}}{c_h} g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t + c_s,\ x \in (0,1)$$

für Konstante $c_s \in \mathbb{C}$. Damit ergibt sich für die Funktion f:

$$f(x) = C(x)f_h(x) = c_h \left(\frac{\mathrm{i}}{c_h} \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t + c_s \right) \mathrm{e}^{-zix},\ x \in [0,1].$$

f stetig differenzierbar und Randbedingungen: So ist f ein Produkt zweier stetiger Funktionen, also selber stetig auf $[0,1]$, ebenso ist es differenzierbar mit Ableitung:

$$f'(x) = c_h \frac{\mathrm{i}}{c_h} g(x)\mathrm{e}^{zix}\mathrm{e}^{-zix} - c_h z\mathrm{i} \left(\frac{\mathrm{i}}{c_h} \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t + c_s \right) \mathrm{e}^{-zix} = \mathrm{i}g(x) - c_h z\mathrm{i} \left(\frac{\mathrm{i}}{c_h} \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t + c_s \right) \mathrm{e}^{-zix}$$

für alle $x \in [0,1]$. Also ist $f \in C^1[0,1]$ nur dann, wenn die Funktion g stetig ist, also $g \in C^0[0,1]$. O.B.d.A.: Sei $g(x) \neq 0$ für ein $x \in [0,1]$.
Damit darf f nicht die Nullfunktion sein, also insbesondere ist $c_h \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Weiter mit den Randbedingungen:
Aus $f(0) = 0$ und $f(1) = 0$ folgt:

$$0 = f(0) = c_h \left(\frac{\mathrm{i}}{c_h} \int_0^0 g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t + c_s \right) \mathrm{e}^{-zi0} = c_h c_s,$$

d.h. $c_s = 0$, und

$$0 = f(1) = c_h \int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{tit}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{zi},$$

d.h.

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t = 0.$$

Bild von $z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - A$: Also ergibt sich als Bild von $z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - A$:

$$\operatorname{range}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - A\right) = \left\{ g \in C^0[0,1] \colon \int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t = 0 \right\} \subseteq L^2(0,1).$$

Bild von $z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}$: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{range}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right) &= \overline{\operatorname{range}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - A\right)}^{\|\cdot\|_{L^2(0,1)}} \\
&= \overline{\left\{ g \in C^0[0,1] \colon \int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t = 0 \right\}}^{\|\cdot\|_{L^2(0,1)}} \\
&= \left\{ g \in L^2(0,1) \colon \int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Kodimension gleich 1: Es gilt:

$$\begin{aligned}
L^2(0,1) &= \operatorname{range}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right) \oplus \operatorname{range}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right)^\perp \\
&= \left\{ g \in L^2(0,1) \colon \int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{zit}\mathrm{d}t = 0 \right\} \oplus \overline{\operatorname{lin}\{\mathrm{e}^{zi\cdot}\}},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\operatorname{codim}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right) = 1 < \infty.$$

$\overline{A}$ Fredholm-Operator mit Index -1: Damit ist $z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}$ ein (unbeschränkter) Fredholm-Operator mit Fredholm-Index:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right) &= \dim\left(\ker\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right)\right) - \operatorname{codim}\left(\operatorname{range}\left(z\mathrm{Id}_{L^2(0,1)} - \overline{A}\right)\right) \\
&= 0 - 1 = -1.
\end{aligned}$$

$\square$