04.07.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Defekt Indizes)

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum. Beweisen Sie, dass ein linearer, dicht-definierter, abgeschlossener, symmetrischer Operator $A\colon D(A) \subseteq H \to H$ genau dann selbst-adjungiert ist, wenn die beiden Defektindizes gleich null sind.

Aufgabe 2 (Nicht-Eindeutigkeit von Maßen)

Finden Sie zwei verschiedene Maße μ_1 und μ_2 so, dass für $H = \mathbb{C}^n$ und Matrix $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ selbst-adjungiert mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gilt:

$$\mathbb{C}^n \cong L^2\left(\sigma(T), \mu_i\right) \text{ für } i = 1, 2.$$

Aufgabe 3 (Friedrichs Fortsetzung\ Selbst-adjungierte Erweiterung)

Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum und $T\colon D(T) \subseteq H \to H$ ein linearer, dicht-definierter, symmetrischer Operator. Beweisen Sie, den Satz zur Friedrichs Erweiterung: Ist T zusätzlich nach unten halbbeschränkt, d.h. gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle Tu, u\rangle_H \geq -C\,\|u\|_H^2 \text{ für alle } u \in D(T),$$

so besitzt T eine selbst-adjungierte Erweiterung.
Vorgehen:

- O.B.d.A.: $C = -1$.
- Betrachten Sie die Form
  $$a(u, v) := \langle Tu, v\rangle_H \text{ für } u, v \in D(T)$$
  und nehmen Sie Vals die Vervollständigung in H von $D(T)$ bzgl. der Norm
  $$u \mapsto p(u) := \sqrt{a(u, u)}.$$
- "Technisches Detail": Zeigen Sie, das durch $\|u\|_V := \lim\limits_{n\to\infty} p(u_n)$ eine wohl-definierte (von der Wahl der Folge unabhängige) Norm definiert wird, wobei $u \in V$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ in H und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. p ist.
- Nutzen Sie den Satz von Lax-Milgram aus, um eine selbst-adjungierte (unbeschränkte) Fortsetzung von T zu erhalten.