04.07.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Spektraltheorie

11. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Defekt Indizes)

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum. Beweisen Sie, dass ein linearer, dicht-definierter, abgeschlossener, symmetrischer Operator $A\colon D(A) \subseteq H \to H$ genau dann selbst-adjungiert ist, wenn die beiden Defektindizes gleich null sind.

Lösung von Aufgabe 1

Nach Satz 5.14 aus der Vorlesung: Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum und $A\colon D(A) \subseteq H \to H$ ein linearer und dicht-definierter Operator. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(i) A ist abschließbar und der Abschluss $\overline{A}$ ist selbst-adjungiert.

(ii) A ist symmetrisch und $\sigma\left(\overline{A}\right) \subseteq \mathbb{R}$.

(iii) A ist symmetrisch und es gibt ein $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ so, dass $z\mathrm{Id}_H - A^*$ und $\overline{z}\mathrm{Id}_H - A^*$ injektiv sind, d.h. $\ker(z\mathrm{Id}_H - A^*) = \ker(\overline{z}\mathrm{Id}_H - A^*) = \{0\}$.

Da $\mathrm{i} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ liegt und in unserem Fall $A = \overline{A}$ ist, würde die Behauptung folgen, wenn wir zeigen, dass die Defektindizes $n_\pm(A) = \ker(\mathrm{i}\mathrm{Id}_H \mp A^*)$ sind. Dazu das folgende kleine Lemma:
Lemma: Seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum und $T\colon D(T) \subseteq H \to H$ ein linearer und dicht-definierter Operator, sowie $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt die Gleichheit:

$$\ker(\overline{z}\mathrm{Id}_H \pm T^*) = \mathrm{range}\,(z\mathrm{Id}_H - A)^\perp.$$

Insbesondere die Äquivalenz:

$$\ker(\overline{z}\mathrm{Id}_H - T^*) = \{0\} \;\Leftrightarrow\; \overline{\mathrm{range}\,(z\mathrm{Id}_H \pm T)}^{\|\cdot\|_H} = H.$$

Beweis: Es gilt:

$$(z\mathrm{Id}_H \pm T)^* = \overline{z}\mathrm{Id}_H^* \pm T^* = \overline{z}\mathrm{Id}_H \pm T^*.$$

Dann gilt die Äquivalenz für $\psi \in H$:

$$\begin{aligned}
\psi \in \mathrm{range}\,(z\mathrm{Id}_H \pm T)^\perp \;&\Leftrightarrow\; \langle\psi, (z\mathrm{Id}_H \pm T)\,\varphi\rangle_H = 0 \text{ für alle } \varphi \in D(T) = D\,(z\mathrm{Id}_H \pm T)\\
&\Leftrightarrow\; \psi \in D\,(T^*) = D\left((z\mathrm{Id}_H \pm T)^*\right) \text{ mit } (\overline{z}\mathrm{Id}_H \pm T^*)\,\psi = (z\mathrm{Id}_H \pm T)^*\,\psi = 0\\
&\Leftrightarrow\; \psi \in \ker(\overline{z}\mathrm{Id}_H \pm T^*)\,.
\end{aligned}$$

Weiter gilt die Aufteilung:

$$\begin{aligned}
H &= \overline{\mathrm{range}\,(z\mathrm{Id}_H \pm T)}^{\|\cdot\|_H} \oplus \mathrm{range}\,(z\mathrm{Id}_H \pm T)^\perp\\
&= \overline{\mathrm{range}\,(z\mathrm{Id}_H \pm T)}^{\|\cdot\|_H} \oplus \ker(\overline{z}\mathrm{Id}_H - T^*)\,.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich auch automatisch

$$n_\pm(T) = \mathrm{codim}\,(\mathrm{range}\,(\mathrm{i}\mathrm{Id}_H \pm T)) = \dim(\ker(\mathrm{i}\mathrm{Id}_H \mp T))\,.$$

Aufgabe 2 (Nicht-Eindeutigkeit von Maßen)

Finden Sie zwei verschiedene Maße μ_1 und μ_2 so, dass für $H = \mathbb{C}^n$ und Matrix $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ selbst-adjungiert mit parweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gilt:

$$\mathbb{C}^n \cong L^2(\sigma(T), \mu_i) \text{ für } i = 1, 2.$$

Lösung von Aufgabe 2

Damit ist $\sigma(T) = \{\lambda_j : j = 1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{C}$. Wir setzen das Maß

$$\mu_1(x) := \sum_{j=1}^{n} \delta_0 (x - \lambda_j) \text{ für } x \in \mathbb{C}.$$

Dann ist $\mathbb{C}^n \cong L^2(\sigma(T), \mu_1)$ durch

$$J_1 : \mathbb{C}^n \to L^2(\sigma(T), \mu_1), u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto f_u,$$

und $f_u(\lambda_j) = u_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ und somit gilt:

$$|u|^2 = \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} |f_u(\lambda_j)|^2 = \|f_u\|^2_{L^2(\sigma(T),\mu_1)}) = \|J_1 u\|^2_{L^2(\sigma(T),\mu_1)}$$

für alle $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$. Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$, dann definiere das gewichtete Maß:

$$\mu_2(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_0 (x - \lambda_j) \text{ für } x \in \mathbb{C}.$$

Dann ist $\mathbb{C}^n \cong L^2(\sigma(T), \mu_2)$ durch

$$J_2 : \mathbb{C}^n \to L^2(\sigma(T), \mu_2), u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto \widetilde{f}_u,$$

und $\widetilde{f}_u(\lambda_j) = \frac{u_j}{\sqrt{a_j}}$ für alle $j = 1, \dots, n$ und somit gilt:

$$|u|^2 = \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j \left| \frac{u_j}{\sqrt{a_j}} \right|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left| \widetilde{f}_u(\lambda_j) \right|^2 = \left\| \widetilde{f}_u \right\|^2_{L^2(\sigma(T),\mu_2)}) = \|J_2 u\|^2_{L^2(\sigma(T),\mu_2)}$$

für alle $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$. Aber durch richtige Wahl von a ist $\mu_2 \neq \mu_1$. □

Aufgabe 3 (Friedrichs Fortsetzung\ Selbst-adjungierte Erweiterung)

Seien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum und $T : D(T) \subseteq H \to H$ ein linearer, dicht-definierter, symmetrischer Operator. Beweisen Sie, den Satz zur Friedrichs Erweiterung: Ist T zusätzlich nach unten halbbeschränkt, d.h. gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle Tu, u \rangle_H \geq -C \|u\|^2_H \text{ für alle } u \in D(T),$$

so besitzt T eine selbst-adjungierte Erweiterung.
Vorgehen:

- O.B.d.A.: $C = -1$.
- Betrachten Sie die Form
$$a(u, v) := \langle Tu, v \rangle_H \text{ für } u, v \in D(T)$$
und nehmen Sie Vals die Vervollständigung in H von $D(T)$ bzgl. der Norm
$$u \mapsto p(u) := \sqrt{a(u, u)}.$$
- "Technisches Detail": Zeigen Sie, das durch $\|u\|_V := \lim_{n\to\infty} p(u_n)$ eine wohl-definierte (von der Wahl der Folge unabhängige) Norm definiert wird, wobei $u \in V$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ in H und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. p ist.
- Nutzen Sie den Satz von Lax-Milgram aus, um eine selbst-adjungierte (unbeschränkte) Fortsetzung von T zu erhalten.

Lösung von Aufgabe 3

O.B.d.A.:$C = -1$
Sonst ersetze T mit

$$\langle Tu, u \rangle_H \geq -\lambda_0 \|u\|^2_H \text{ für alle } u \in D(T)$$

durch

$$\widetilde{T} := T + (\lambda_0 + 1)\,\mathrm{Id}_H,$$

denn dann ist für alle $u, v \in D\left(\widetilde{T}\right) = D(T)$ nach der Halbbeschränktheit und der Symmetrie von T:

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{T}u, u \right\rangle_H &= \langle Tu + (\lambda_0 + 1)\,u, u\rangle_H = \langle Tu, u\rangle_H + (\lambda_0 + 1)\,\langle u, u\rangle_H \\
&\geq -\lambda_0 \,\|u\|_H^2 + (\lambda_0 + 1)\,\|u\|_H^2 = \|u\|_H^2\,, \\
\left\langle \widetilde{T}u, v \right\rangle_H &= \langle Tu + (\lambda_0 + 1)\,u, v\rangle_H = \langle Tu, v\rangle_H + (\lambda_0 + 1)\,\langle u, v\rangle_H \\
&= \langle u, Tv\rangle_H + \left\langle u, \overline{(\lambda_0 + 1)}v \right\rangle_H = \langle u, Tv\rangle_H + \langle u, (\lambda_0 + 1)\,v\rangle_H \\
&= \langle u, Tv + (\lambda_0 + 1)\,v\rangle_H = \left\langle u, \widetilde{T}v \right\rangle_H\,,
\end{aligned}$$

somit ist $\widetilde{T}$ auch symmetrisch.
Ist nun $\widetilde{S}$ eine selbst-adjungierte Fortsetzung von $\widetilde{T}$, so ist erstmal

$$D(T) = D\left(\widetilde{T}\right) \subseteq D\left(\widetilde{S}\right)$$

und es gilt für alle $u \in D(T)$:

$$\left(\widetilde{S} - (\lambda_0 + 1)\,\mathrm{Id}_H\right) u = \widetilde{S}u - (\lambda_0 + 1)\,u = \widetilde{T}u - (\lambda_0 + 1)\,u = Tu + (\lambda_0 + 1)\,u - (\lambda_0 + 1)\,u = Tu.$$

Weiter ist der Operator $S := \widetilde{S} - (\lambda_0 + 1)\,\mathrm{Id}_H$ mit $D(S) := D\left(\widetilde{S}\right)$ selbst-adjungiert, denn es gilt:

$$S^* = \left(\widetilde{S} - (\lambda_0 + 1)\,\mathrm{Id}_H\right)^* = \widetilde{S}^* - \overline{(\lambda_0 + 1)}\mathrm{Id}_H^* = \widetilde{S} - (\lambda_0 + 1)\,\mathrm{Id}_H = S \text{ auf } D(S).$$

Damit ist S eine selbst-adjungierte Fortsetzung von T. Also können wir uns auf den Fall $C = -1$ beschränken.
Das Skalarprodukt a:
Definiere die Form:

$$a\colon D(T) \times D(T) \to \mathbb{C},\ (u, v) \mapsto \langle Tu, v\rangle_H.$$

Dann ist a ein Skalarprodukt, denn es gilt wegen der Halbbeschränktheit und der Symmetrie von T für alle $u, v, w \in D(T)$, $\mu \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
a(u + w, v) &= \langle u + w, v\rangle_H = \langle Tu, v\rangle_H + \langle Tw, v\rangle_H = a(u, v) + a(w, v), \\
a(u, v + w) &= \langle Tu, v + w\rangle_H = \langle Tu, v\rangle_H + \langle Tu, w\rangle_H = a(u, v) + a(u, w), \\
a(\mu u, v) &= \langle T(\mu u), v\rangle_H = \mu\langle Tu, v\rangle_H = \mu a(u, v), \\
a(u, \mu v) &= \langle Tu, \mu v\rangle_h = \overline{\mu}\langle Tu, v\rangle_H = \overline{\mu}a(u, v), \\
a(u, v) &= \langle Tu, v\rangle_H = \langle u, Tv\rangle_H = \overline{\langle Tv, u\rangle_H} = \overline{a(v, u)}, \\
a(u, u) &= \langle Tu, u\rangle_H \geq \|u\|_H^2 \geq 0 \qquad (*) \\
a(u, u) = 0 \ &\Leftrightarrow\ 0 = a(u, u) \geq \|u\|_H^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \|u\|_H = 0 \ \Leftrightarrow u = 0.
\end{aligned}$$

p ist eine Norm:
Da a ein Skalarprodukt ist, wird durch

$$p(u) := \sqrt{a(u, u)},\ u \in D(T)$$

eine Norm auf $D(T)$ definiert mit (nach $(*)$):

$$p(u) = \sqrt{a(u, u)} \geq \sqrt{\|u\|_H^2} = \|u\|_H \geq 0 \text{ für alle } u \in D(T) \quad (**).$$

Definition von V:
Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Norm p und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|u_n - u_m\|_H \leq p\,(u_n - u_m) \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n, m \geq n_0,$$

nach $(**)$, d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge bzgl. der $\|\cdot\|_H$-Norm. Da H als Hilbertraum vollständig ist, konvergiert die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H gegen ein Element $u \in H$. Damit können wir V als Vervollständigung von $D(T)$ in H bzgl p ansehen, genauer:

$$V := \overline{D(T)}^p = \left\{u \in H\colon \text{es gibt eine Cauchy-Folge } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T) \text{ bzgl. der Norm } p \text{ mit } \lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ in } H\right\} \subseteq H.$$

Setze für $u \in V$:

$$\|u\|_V := \lim_{n\to\infty} p(u_n) \in [0,\infty],$$

wobei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ eine Cauchy-FOlge bzgl der Norm p ist mit $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ in H. Nach dem unteren Lemma ist V und $\|\cdot\|_V$ wohl-definiert, also unabhängig von der Wahl der Cauchy-Folge.
$\|\cdot\|_V$ ist eine Norm auf V:
Seien $u, v \in V$ mit zugehörigen Cauchy-Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist auch $\lambda u, u+v \in V$ insbesondere mit der Cauchy-Folge $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$. Es gilt:

$$\|u\|_V = \lim_{n\to\infty} p(u_n) \geq 0,$$

und da Cauchy-Folgen beschränkt sind, ist

$$\|u\|_V \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} p(u_n) \in [0,\infty),$$

d.h. $\|\cdot\|_V : V \to [0,\infty)$.
Die Homogenität erhalten wir aus der Homogenität von p ebenso bei der Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\|_V &= \lim_{n\to\infty} p(\lambda u_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} p(u_n) = \lambda \|u\|_V\,, \\
\|u+v\|_V &= \lim_{n\to\infty} p(u_n + v_n) \leq \lim_{n\to\infty} (p(u_n) + p(v_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} p(u_n) + \lim_{n\to\infty} p(v_n) = \|u\|_V + \|v\|_V\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $\|\cdot\|_V$ eine Norm auf V.
Die selbst-adjungierte Fortsetzung S:
Nun gilt wegen $(**)$:

$$\|u\|_V = \lim_{n\to\infty} p(u_n) \geq \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_H = \|u\|_H$$

für alle $u \in V$ mit Cauchy-Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ bzgl. der Norm p. Damit ist $J\colon (V, \|\cdot\|_V) \to (H, \|\cdot\|_H)\,,\ u \to u$ eine linear, stetige Injektion. Wegen $D(T) \subseteq V \subseteq H$ folgt nun

$$H = \overline{D(T)}^{\|\cdot\|_H} \subseteq \overline{V}^{\|\cdot\|_H} \subseteq \overline{H}^{\|\cdot_H\|} = H,$$

also ist

$$\overline{V}^{\|\cdot\|_H} = H,$$

d.h. $V \subseteq H$ ist dicht in H. Wir setzen das Skalarprodukt

$$b(u,v) := \lim_{n\to\infty} a(u_n, v_n)$$

für $u, v \in V$ mit Cauchy-Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ bzgl. der Norm p und weiter ist b V-elliptisch, denn:

$$b(u,u) = \lim_{n\to\infty} a(u_n, u_n) = \lim_{n\to\infty} p(u_n)^2 = \|u\|_V^2\,.$$

Also finden wir nach dem Satz von Lax-Milgram (Unbeschränkte Version) (als Form nehmen wir b) und dem Zusatz, da die Form b als Skalarprodukt insbesondere hermitesch ist, einen linearen, abgeschlossen, dicht-definierten, selbst-Adjungierten Operator S mit Definitionsbereich $D(T) \subseteq D(S) \subseteq V$. Dann gilt für alle $u, v \in D(T)$:

$$\langle Su, v\rangle_H = b(u,v) = a(u,v) = \langle Tu, v\rangle_H$$

und aus der Dichtheit von $D(T) \subseteq H$ folgt nun, dass $S|_{D(T)} = T$ ist. Damit ist S eine selbst-adjungierte Fortsetzung von T und diese nennen wir Friedrichs Erweiterung. □
Bemerkung: (Alternativer Beweis)
Anstatt den Satz von Lax-Milgram zu nutzen können wir auch den Satz 6.3 aus der Vorlesung zitieren und setzen darin $\omega = 0$ und $\delta = 0$.
Lemma: (Wohldefiniertheit von V bzw. von $\|\cdot\|_V$)
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Norm p und $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ in H, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} p(u_n) = 0.$$

Beweis: Wir haben im Abschnitt der Normeigenschaften von $\|\cdot\|_V$ schon eingesehen, dass $(p(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty)$ konvergiert, da Cauchy-Folgen insbesondere stets beschränkt sind. Angenommen es gebe eine Zahl $\gamma \in (0,\infty)$ und eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass

$$\lim_{n\to\infty} p(u_{n_k}) = \gamma.$$

Betrachte für $k, l \in \mathbb{N}$:

$$a(u_{n_k}, u_{n_l}) = a(u_{n_k}, u_{n_l} - u_{n_k} + u_{n_k}) = a(u_{n_k}, u_{n_k}) + a(u_{n_k}, u_{n_l} - u_{n_k})$$

und mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |a(u_{n_k}, u_{n_l} - u_{n_k})| &\leq \sqrt{a(u_{n_k}, u_{n_k})}\sqrt{a(u_{n_l} - u_{n_k}, u_{n_l} - u_{n_k})} = p(u_{n_k})\, p(u_{n_l} - u_{n_k}) \\ &\to 0 \text{ für } k, l \to \infty, \end{aligned}$$

da $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dann folgt für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \left|a(u_{n_k}, u_{n_l}) - \gamma^2\right| &= \left|a(u_{n_k}, u_{n_k}) - \gamma^2 + a(u_{n_k}, u_{n_l} - u_{n_k})\right| \\ &\leq \left|p(u_{n_k})^2 - \gamma^2\right| + |a(u_{n_k}, u_{n_l} - u_{n_k})| \\ &< \varepsilon \text{ für alle } k, l \in \mathbb{N} \text{ mit } k, l \geq k_0. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\varepsilon := \frac{\gamma^2}{2}$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ passend dazu, dann erhalten wir für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k, l \geq k_0$:

$$\begin{aligned} \left|\langle Tu_{n_k}, u_{n_l}\rangle_H\right| &= |a(u_{n_k}, u_{n_l})| = \left|\gamma^2 - \left(\gamma^2 - a(u_{n_k}, u_{n_l})\right)\right| \geq \gamma^2 - \left|a(u_{n_k}, u_{n_l}) - \gamma^2\right| \\ &> \gamma^2 - \varepsilon = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{2} = \frac{\gamma^2}{2} > 0, \end{aligned}$$

aber es gilt:

$$\lim_{l\to\infty} \left|\langle Tu_{n_k}, u_{n_l}\rangle_H\right| = 0,$$

da

$$\lim_{l\to\infty} u_{n_l} = 0 \text{ in } H$$

ist. Dies ist ein Widerspruch, also war die Annahme falsch und es muss

$$\lim_{n\to\infty} p(u_n) = 0$$

gelten. Dies war zu zeigen. □

Bemerkung:
Dies gibt uns nun für zwei Cauchy-Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ bzgl. der Norm p:

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}} &:\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n \text{ in } H \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p(u_n - v_n) = 0. \end{aligned}$$

D.h. für die Vervollständigung gilt:

$$\overline{D(T)}^p = \left\{ \left[(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]_\sim :\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T) \text{ ist eine Cauchy-Folge bzgl. der Norm } p \right\}.$$

Und damit ist

$$\overline{D(T)}^p \cong \left\{ u \in H:\ \text{es gibt eine Cauchy-Folge } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T) \text{ bzgl. der Norm } p \text{ mit } \lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ in } H \right\} = V.$$