10.07.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

# Spektraltheorie

## 12. Übungsblatt

**Definition**: ($C_0$-Halbgruppe und deren Erzeuger) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Wir nennen eine Operatorfamilie $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(X)$ eine $C_0$-Halbgruppe, falls gilt:

(1) $T(0) = \mathrm{Id}_X$.

(2) $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$.

(3) $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$ in $X$ für alle $x \in X$.

Ist nun $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(X)$ eine $C_0$-Halbgruppe, dann definieren wir den Erzeuger dieser $C_0$-Halbgruppe durch

$$D(A) := \left\{ x \in X \colon \text{es existiert der Limes } \lim_{t\to 0^+} t^{-1}\left(T(t)x - x\right) \in X \right\} \subseteq X,$$
$$A := \lim_{t\to 0^+} t^{-1}\left(T(t)x - x\right) \in X \text{ für } x \in D(A).$$

### Aufgabe 1 (Exponentielles Wachstum)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(X)$ eine $C_0$-Halbgruppe. Zeigen Sie, dass dann Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existieren so, dass
$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t} \text{ für alle } t \geq 0 \text{ gilt.}$$

### Aufgabe 2 (Eigenschaften des Erzeugers $A$)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(X)$ eine $C_0$-Halbgruppe mit Erzeuger $A \colon D(A) \subseteq X \to X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) $A$ ist ein linearer Operator mit $AT(t) = T(t)A$ auf $D(A)$ für alle $t \geq 0$ und für alle $x \in D(A)$ ist die Funktion $u := T(\cdot)x$ in $C^1\left([0,\infty), (X, \|\cdot\|_X)\right) \cap C^0\left([0,\infty), (D(A), \|\cdot\|_A)\right)$ und $u$ löst die Differentialgleichung:
$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \text{ für } t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}.$$

(ii) Für alle $t > 0$ und $x \in X$ ist $\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \in D(A)$ mit
$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s.$$
Ist somit $x \in D(A)$, dann gilt:
$$A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s.$$

(iii) $A$ ist abgeschlossen und $D(A) \subseteq X$ ist dicht.

(iv) $A$ charakterisiert die $C_0$-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$, d.h. es gibt keine weitere $C_0$-Halbgruppe mit demselben Erzeuger $A$.

## Aufgabe 3 (Beispiel: Translationshalbgruppe)

Seien hier nun $X = BUC(\mathbb{R})$ mit $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{C^0(\mathbb{R})}$ und definiere zu $t \geq 0$:

$$(T(t)f)(x) := f(x+t) \text{ für } f \in BUC(\mathbb{R}) \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine $C_0$-Halbgruppe ist und bestimmen Sie den Erzeuger $A$ von $(T(t))_{t\geq 0}$.