10.07.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Spektraltheorie

12. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Definition: (C_0-Halbgruppe und deren Erzeuger) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Wir nennen eine Operatorfamilie $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(X)$ eine C_0-Halbgruppe, falls gilt:

(1) $T(0) = \mathrm{Id}_X$.

(2) $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$.

(3) $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$ in X für alle $x \in X$.

Ist nun $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(X)$ eine C_0-Halbgruppe, dann definieren wir den Erzeuger dieser C_0-Halbgruppe durch

$$\begin{aligned} D(A) &:= \left\{ x \in X : \text{es existiert der Limes } \lim_{t\to 0^+} t^{-1}\left(T(t)x - x\right) \in X \right\} \subseteq X, \\ A &:= \lim_{t\to 0^+} t^{-1}\left(T(t)x - x\right) \in X \text{ für } x \in D(A). \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (Exponentielles Wachstum)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(X)$ eine C_0-Halbgruppe. Zeigen Sie, dass dann Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existieren so, dass

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M\mathrm{e}^{\omega t} \text{ für alle } t \geq 0 \text{ gilt.}$$

Lösung von Aufgabe 1

Der Beweis teilt sich in zwei Schritte auf.
Schritt 1.: Wir zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \|T(t)\|_{L(X)} < \infty.$$

Annahme: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $t_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ mit $\|T(t_n)\|_{L(X)} \geq n$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t_n)\|_{L(X)} = \infty,$$

d.h. $\left(\|T(t_n)\|_{L(X)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt. Aber wegen $\lim\limits_{n\to\infty} T(t_n)x = x$ in X für alle $x \in X$ (starke Stetigkeit der Halbgruppe) ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)x\|_X < \infty \text{ für alle } x \in X.$$

Also folgt mit dem Satz von Banach-Steinhaus, dass auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)\|_{L(X)} < \infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch. Demnach gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$M := \sup_{t\in[0,\delta]} \|T(t)\|_{L(X)} < \infty,$$

und es gilt:

$$M = \sup_{t\in[0,\delta]} \|T(t)\|_{L(X)} \geq \|T(0)\|_{L(X)} = \|\mathrm{Id}_X\|_{L(X)} = 1.$$

Schritt 2.: Zeige nun das exponentielle Wachstum.
Sei $t \in [0, \infty)$, so wähle $n \in \mathbb{N}_0$ und $r \in [0, \delta)$ mit

$$t = n\delta + r,$$

d.h. es gilt:

$$n = \frac{t - r}{\delta}.$$

Dann ist nach der Halbgruppeneigenschaft/ Funktionalgleichung:

$$T(t) = T(n\delta + r) = T(n\delta)T(r) = T(\delta)^n T(r).$$

Dies liefert uns wegen der Submultiplikativität der $\|\cdot\|_{L(X)}$-Norm und wegen

$$\frac{r \log(M)}{\delta} \geq \frac{r \log(1)}{\delta} = \frac{0}{\delta} = 0,$$

dass gilt:

$$\begin{aligned}\|T(t)\|_{L(X)} &= \|T(\delta)^n T(r)\|_{L(X)} \leq \|T(\delta)^n\|_{L(X)} \|T(r)\|_{L(X)} \leq \|T(\delta)\|_{L(X)}^n \|T(r)\|_{L(X)} \\ &\leq M^n M = M\mathrm{e}^{n\log(M)} = M\mathrm{e}^{\frac{\log(M)}{\delta}(t-r)} \leq M\mathrm{e}^{\frac{\log(M)}{\delta}t}.\end{aligned}$$

Durch setzen von

$$\omega := \frac{\log(M)}{\delta} \geq \frac{\log(1)}{\delta} = \frac{0}{\delta} = 0$$

gilt nun:

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M\mathrm{e}^{\omega t} \text{ für alle } t \in [0, \infty).$$

Bemerkung: Im Beweis kam zwar nun raus, dass das konstruierte ω nicht-negativ ist. In Wirklichkeit gibt es aber auch C_0-Halbgruppen mit negativen ω.

Aufgabe 2 (Eigenschaften des Erzeugers A)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(X)$ eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger $A\colon D(A) \subseteq X \to X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) A ist ein linearer Operator mit $AT(t) = T(t)A$ auf $D(A)$ für alle $t \geq 0$ und für alle $x \in D(A)$ ist die Funktion $u := T(\cdot)x$ in $C^1\left([0, \infty), (X, \|\cdot\|_X)\right) \cap C^0\left([0, \infty), (D(A), \|\cdot\|_A)\right)$ und u löst die Differentialgleichung:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \text{ für } t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}.$$

(ii) Für alle $t > 0$ und $x \in X$ ist $\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s \in D(A)$ mit

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s.$$

Ist somit $x \in D(A)$, dann gilt:

$$A\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)Ax\mathrm{d}s.$$

(iii) A ist abgeschlossen und $D(A) \subseteq X$ ist dicht.

(iv) A charakterisiert die C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$, d.h. es gibt keine weitere C_0-Halbgruppe mit demselben Erzeuger A.

Lösung von Aufgabe 2

(i) A **ist linear**: Seien $x, y \in D(A)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann ist $\lambda x + \mu y \in X$ mit

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)(\lambda x + \mu y) - (\lambda x + \mu y)}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\lambda\,(T(t)x - x) + \mu\,(T(t)y - y)}{t}\right) \\ &= \lambda \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} + \mu \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)y - y}{t}\end{aligned}$$

$$= \lambda Ax + \mu Ay \in X,$$

d.h. $\lambda x + \mu y \in D(A)$ mit

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay.$$

$D(A)$ **ist nicht leer**: Es gilt $D(A) \neq \emptyset$, da $0 \in X$ ist mit

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)0 - 0}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t} = 0 \in X,$$

d.h. $0 \in D(A)$ mit $A0 = 0$.
Kommutation mit der Halbgruppe: Sei $x \in D(A)$. Es gilt für alle $t \in [0, \infty)$ wegen der Stetigkeit von $T(t)$:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h+t)x - T(t)x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} T(t)\frac{T(h)x - x}{h}\\ &= T(t)\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}\\ &= T(t)Ax \in X,\end{aligned}$$

d.h. $T(t)x \in D(A)$ mit

$$AT(t)x = T(t)Ax.$$

Differenzierbarkeit von u: Sei $x \in D(A)$ fest. Das obere liefert uns die Differenzierbarkeit von rechts von der Funktion $u = T(\cdot)x$ mit rechtsseitiger Ableitung

$$D^+u = T(\cdot)Ax = AT(\cdot)x.$$

Für die linksseitige Differenzierbarkeit sei $t > 0$ und $h \in (-t, 0)$, d.h. $t + h \in (0, \infty)$. Dann gilt wegen der Halbgruppeneigenschaft:

$$\begin{aligned}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax &= \frac{T(t+h)x - T(t+h-h)x}{h} - T(t+h-h)Ax\\ &= \frac{T(t+h)x - T(t+h)T(-h)x}{h} - T(t+h)T(-h)Ax\\ &= T(t+h)\frac{x - T(-h)x}{h} - T(t+h)T(-h)Ax\\ &= T(t+h)\left(\frac{T(-h)x - x}{-h} - T(-h)Ax\right)\\ &= T(t+h)\left(\frac{T(-h)x - x}{-h} - Ax + Ax - T(-h)Ax\right),\end{aligned}$$

damit folgt nun nach Aufgabe 1, der Definition von A und der starken Stetigkeit der Halbgruppe:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\|_X &= \left\|T(t+h)\left(\frac{T(-h)x - x}{-h} - Ax + Ax - T(-h)Ax\right)\right\|_X\\ &\leq \|T(t+h)\|_{L(X)} \left\|\left(\frac{T(-h)x - x}{-h} - Ax\right) + (Ax - T(-h)Ax)\right\|_X\\ &\leq M\mathrm{e}^{\omega(t+h)}\left(\left\|\frac{T(-h)x - x}{-h} - Ax\right\|_X + \|T(-h)Ax - Ax\|_X\right)\\ &\to M\mathrm{e}^{\omega t}(0+0) = 0 \text{ für } h \to 0^-.\end{aligned}$$

Dies bedeutet die Funktion u ist links-differenzierbar mit linksseitiger Ableitung

$$D^-u = T(t)Ax = AT(t)x = D^+u \text{ auf } [0, \infty).$$

Damit ist die Funktion u differenzierbar mit Ableitung

$$u' = AT(\cdot)x = Au \text{ und } u(0) = T(0)x = \mathrm{Id}_X x = x.$$

Weiter ist die Funktion $T(\cdot)Ax = AT(\cdot)x = u'$ stetig auf $[0, \infty)$ und damit ist

$$u \in C^1\left([0, \infty), (X, \|\cdot\|_X)\right) \cap C^0\left([0, \infty), (D(A), \|\cdot\|_A)\right).$$

(ii) Seien $x \in X$ und $t > 0$. Setzen wir $y := \int_0^t T(s)x\mathrm{d}s \in X$. Dann haben wir nach dem Satz von Hille (siehe Übung) für $h \in (0,t)$:

$$\begin{aligned}\frac{T(h)y-y}{h} &= \frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right) = \frac{1}{h}\left(\int_0^t T(h)T(s)x\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t T(h+s)x\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right) = \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \int_0^h T(s)x\mathrm{d}s - \int_h^t T(s)x\mathrm{d}s\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \int_0^h T(s)x\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

Es folgt nun nach dem Satz von Hille:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - T(t)x &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t)x\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(t+s-t)x - T(t)x)\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(t)T(s-t)x - T(t)x)\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t)(T(s-t)x - x)\mathrm{d}s\\ &= T(t)\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(s-t)x-x)\mathrm{d}s = T(t)\frac{1}{h}\int_0^h (T(s)x-x)\mathrm{d}s,\\ \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\mathrm{d}s - x &= \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h x\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_0^h (T(s)x-x)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Zudem gilt wegen der starken Stetigkeit der Halbgruppe:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h (T(s)x-x)\mathrm{d}s\right\|_X &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|T(s)x-x\|_X\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{h}\int_0^h \sup_{\tau\in[0,h]}\|T(\tau)x-x\|_X\,\mathrm{d}s = \sup_{\tau\in[0,h]}\|T(\tau)x-x\|_X\\ &\to 0 \text{ für } h\to 0^+,\end{aligned}$$

d.h. wegen der Stetigkeit von $T(t)$ ist

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - T(t)x = \lim_{h\to 0^+} T(t)\frac{1}{h}\int_0^h (T(s)x-x)\mathrm{d}s = 0 \text{ in } X,$$

und daher ist

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)y-y}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \int_0^h T(s)x\mathrm{d}s\right) = T(t)x - x \in X.$$

Dies bedeutet nun, dass $\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s = y \in D(A)$ mit

$$A\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s = Ay = T(t)x - x.$$

Ist nun $x \in D(A)$, so wissen wir, dass $T(\cdot)x \in D(A)$ ist und es gilt mit dem Satz von Hille:

$$\begin{aligned}T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}T(h)\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\int_0^t T(h)T(s)x\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right)\\ &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\int_0^t T(s)T(h)x\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t (T(s)T(h)x - T(s)x)\,\mathrm{d}s\\ &= \lim_{h\to 0^+}\int_0^t T(s)\left(\frac{T(h)x-x}{h}\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

für alle $t > 0$. Wegen $x \in D(A)$ konvergiert:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x-x}{h} = Ax$$

und daher auch

$$\lim_{h\to 0^+} T(t)\frac{T(h)x-x}{h} = T(t)Ax$$

für alle $t > 0$, da $T(t)$ stetig ist. Weiter ist

$$\sup_{s\in[0,t]}\|T(s)\|_{L(H)} \leq \sup_{s\in[0,t]} M\mathrm{e}^{\omega s} \leq M\mathrm{e}^{|\omega|t} < \infty$$

für alle $t > 0$ nach Aufgabe 1. Damit folgt nun für alle $t > 0$:

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t T(s)\left(\frac{T(h)x-x}{h}\right)\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)Ax\mathrm{d}s\right\|_X &= \left\|\int_0^t \left(T(s)\frac{T(h)x-x}{h} - T(s)Ax\right)\mathrm{d}s\right\|_X \\ &= \left\|\int_0^t T(s)\left(\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right)\mathrm{d}s\right\|_X \\ &\leq \int_0^t \left\|T(s)\left(\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right)\right\|_X \mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t \|T(s)\|_{L(H)} \left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\|_X \mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t M\mathrm{e}^{|\omega|t} \left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\|_X \mathrm{d}s \\ &= Mt\mathrm{e}^{|\omega|t}\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\|_X \to 0 \text{ für } h \to 0^+.\end{aligned}$$

Nun folgt mit $AT(\cdot)x = T(\cdot)Ax$ aus (i):

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)Ax\mathrm{d}s = \int_0^t AT(s)x\mathrm{d}s$$

für alle $t \geq 0$. (iii) A **ist abgeschlossen**: Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$, $x, y \in X$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in X und $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$ in X. Dann folgt aus (ii):

$$\frac{T(h)x_n - x_n}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)Ax_n\mathrm{d}s \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ h > 0.$$

Die Konvergenz von $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liefert nun für alle $h > 0$:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(s)Ax_n\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)y\mathrm{d}s\right\|_X &= \left\|\frac{1}{h}\int_0^h (T(s)Ax_n - T(s)y)\,\mathrm{d}s\right\|_X \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|T(s)\,(Ax_n - y)\|_X\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h \|T(s)\|_{L(X)}\,\|Ax_n - y\|_X\,\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h M\mathrm{e}^{\omega s}\mathrm{d}s\,\|Ax_n - y\|_X \\ &\leq \frac{M}{h}\int_0^h \mathrm{e}^{|\omega|h}\mathrm{d}s\,\|Ax_n - y\|_X \\ &= M\mathrm{e}^{|\omega|h}\,\|Ax_n - y\|_X \\ &\to 0 \text{ für } n \to \infty,\end{aligned}$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)Ax_n\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)y\mathrm{d}s \text{ für alle } h > 0.$$

Aus der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Stetigkeit von $T(h)$ für alle $h \geq 0$ erhalten wir somit für alle $h > 0$:

$$\frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{n\to\infty}\frac{T(h)x_n - x_n}{h} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)Ax_n\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)y\mathrm{d}s.$$

Aus der starken Stetigkeit der Halbgruppe bekommen wir

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(s)y\mathrm{d}s - y\right\|_X &= \left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(s)y\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h y\mathrm{d}s\right\|_X = \left\|\frac{1}{h}\int_0^h (T(s)y - y)\,\mathrm{d}s\right\|_X \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|T(s)y - y\|_X\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{h}\int_0^h \sup_{\tau\in[0,h]}\|T(\tau)y - y\|_X\,\mathrm{d}s \\ &= \sup_{\tau\in[0,h]}\|T(\tau)y - y\|_X\end{aligned}$$

$$\to 0 \text{ für } h \to 0^+,$$

d.h.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h T(s)y\mathrm{d}s = y \in X,$$

und damit ist $x \in D(A)$ mit $Ax = y$. Dies bedeutet, dass der lineare Operator A abgeschlossen ist.
A **ist dicht-definiert**: Sei dazu $x \in X$ und setze die Folge

$$x_n := n\int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x\mathrm{d}s \text{ zu } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist nach (ii): $x_n \in D(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Und weiter ist laut der starken Stetigkeit der Halbgruppe

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\|_X &= \left\| n\int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x\mathrm{d}s - x\right\|_X = \left\| n\int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x\mathrm{d}s - n\int_0^{\frac{1}{n}} x\mathrm{d}s\right\|_X = \left\| n\int_0^{\frac{1}{n}} \left(T(s)x - x\right)\mathrm{d}s\right\|_X \\
&\le n\int_0^{\frac{1}{n}} \|T(s)x - x\|_X \,\mathrm{d}s \le n\int_0^{\frac{1}{n}} \sup_{\tau\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} \|T(\tau)x - x\|_X \,\mathrm{d}s \\
&= \sup_{\tau\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} \|T(\tau)x - x\|_X \\
&\to 0 \text{ für } n \to \infty,
\end{aligned}$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in X. Daraus folgt nun (da $x \in X$ beliebig war):

$$\overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X} = X,$$

dies heißt, dass $D(A) \subseteq X$ dicht ist und so ist A dicht-definiert.
(iv) A **charakterisiert die Halbgruppe**: Sei $(S(t))_{t\ge 0} \subseteq L(X)$ eine weitere C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A, weiter seien $x \in D(A)$ und $t > 0$ fest. Setze die Funktion

$$v\colon [0,t] \to X,\ s \mapsto T(t-s)S(s)x.$$

Damit ist v als Vekettung von differenzierbaren Funktionen wieder differenzierbar mit Ableitung

$$v'(s) = -AT(t-s)S(s)x + AT(t-s)S(s)x = 0 \text{ für alle } s \in (0,t).$$

Daraus folgt nun

$$v(s) = v(0) = T(t-0)S(0)x = T(t)\mathrm{Id}_X x = T(t)x \text{ für alle } s \in [0,t].$$

Insbesondere für $s = t$ gilt nun:

$$S(t)x = \mathrm{Id}_X S(t)x = T(0)S(t)x = T(t-t)S(t)x = v(t) = T(t)x.$$

Da die Menge $D(A) \subseteq X$ dicht ist in X, folgt somit

$$S(t) = T(t).$$

Da $t > 0$ beliebig war, erhalten wir:

$$S(t) = T(t) \text{ für alle } t \ge 0.$$

Dies war zu zeigen. □

Aufgabe 3 (Beispiel: Translationshalbgruppe)

Seien hier nun $X = BUC(\mathbb{R})$ mit $\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{C^0(\mathbb{R})}$ und definiere zu $t \ge 0$:

$$(T(t)f)(x) := f(x+t) \text{ für } f \in BUC(\mathbb{R}) \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\ge 0}$ eine C_0-Halbgruppe ist und bestimmen Sie den Erzeuger A von $(T(t))_{t\ge 0}$.

Lösung von Aufgabe 3

$(T(t))_{t\ge 0}$ **ist eine C_0-Halbgruppe**: Seien $f, g \in BUC(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \ge 0$ beliebig. Dann gilt:

$$(T(t)\left(\lambda f + \mu g\right))(x) = \left(\lambda f + \mu g\right)(x+t) = \lambda f(x+t) + \mu g(x+t) = \lambda(T(t)f)(x) + \mu(T(t)g)(x)$$

$$= (\lambda T(t)f + \mu T(t)g)\,(x),$$

d.h. $T(t)$ ist ein linearer Operator. Weiter ist:

$$\|T(t)f\|_{BUC(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(T(t)f)(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+t)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_{BUC(\mathbb{R})},$$

d.h. $T(t)$ ist beschränkt und somit insbesondere stetig, also ist $T(t) \in L(BUC(\mathbb{R}))$ mit $\|T(t)\|_{L(BUC(\mathbb{R}))} = 1$.
Für $t = 0$ gilt:

$$T(0)f(x) = f(x+0) = f(x), \text{ d.h. } T(0) = \mathrm{Id}_{BUC(\mathbb{R})}.$$

Ist nun $s \geq 0$, so gilt:

$$(T(t+s)f)\,(x) = f(x+t+s) = (T(s)f)(x+t) = (T(t)T(s)f)\,(x).$$

Also erfüllt $(T(t))_{t\geq 0}$ die Halbgruppeneigenschaft.
Für die starke Stetigkeit sei $\varepsilon > 0$. Da die Funktion f insbesondere gleichmäßig stetig ist, finden wir ein $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ so, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$ folgt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ist nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist für $t \in [0, \delta)$:

$$|(x+t) - x| = |t| = t < \delta,$$

woraus

$$|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$$

folgt. Damit folgt auch für alle $t \in [0, \delta)$:

$$\|T(t)f - f\|_{BUC(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(T(t)f)(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \varepsilon = \varepsilon.$$

Also ist die Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq L(BUC(\mathbb{R}))$ stark stetig, und damit ist $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe.
Erzeuger A der Halbgruppe: Sei $f \in D(A) \subseteq BUC(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$(Af)(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)f - f}{h}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)f(x) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = D^+f(x),$$

wobei wir mit D^+f die rechtsseitige Ableitung der Funktion f bezeichnen. Das heißt wir haben erstmal

$$A = D^+ \text{ mit } D(A) = \left\{f \in C_b^0(\mathbb{R})\colon f \text{ ist rechtsseitig differenzierbar mit rechtsseitiger Ableitung } D^+f \in BUC(\mathbb{R})\right\}.$$

Da für alle $f \in D(A)$ automatisch $D^+f \in C^0(\mathbb{R})$ ist, folgt, dass f stetig differenzierbar ist mit $f' = D^+f$. Ist umgekehrt $f \in BUC(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar mit $f' \in BUC(\mathbb{R})$, so ist die Funktion f natürlich auch rechtsseitig differenzierbar mit $D^+f = f' \in BUC(\mathbb{R})$. Damit ergibt sich nun für den Operator A:

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \text{ mit } D(A) = \left\{f \in C_b^1(\mathbb{R})\colon f' \in BUC(\mathbb{R})\right\}.$$

$\square$