Spektraltheorie
Sommersemester 2018

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Falle zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

1 Das Spektrum abgeschlossener Operatoren

Notation: i) Wenn nichts underes gesagt wird, sind X, Y und Z komplexe Banachräume.

ii) $\mathcal{L}(X,Y) := \{T : X \to Y : \ T \text{ ist linear und beschränkt}\}$. Für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist die *Operatornorm* gegeben durch

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y,$$

und $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

iii) Ein *linearer Operator* A von X nach Y ist ein linearer Operator $A : D(A) \to Y$, wobei $D(A)$, der *Definitionsbereich* von A, ein linearer Teilraum von X ist. Wir schreiben auch $A : X \supseteq D(A) \to Y$. Weiter schreiben wir

$$\begin{aligned} R(A) &:= \{Ax : x \in D(A)\} \ \textit{Bild} \text{ von } A, \\ N(A) &:= \{x \in D(A) : Ax = 0\} \ \textit{Kern} \text{ von } A. \end{aligned}$$

Wir werden uns mit abgeschlossenen Operator beschäftigen.

1.1. Definition: Ein linearer Operator A von X nach Y heißt *abgeschlossen*, falls der Graph

$$\mathrm{Gr}(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subseteq X \times Y$$

ein abgeschlossener Teilraum von $X \times Y$ ist.

Bemerkung: Da A linear ist, ist der Graph $\mathrm{Gr}(A)$ ein linearer Teilraum von $X \times Y$. Der Raum $X \times Y$ ist bzgl. der durch $\|(x,y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$ gegebenen Norm ein Banachraum.

1.2. Lemma: Sei $A : X \supseteq D(A) \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen,

(ii) $D(A)$ ist ein Banachraum bzgl. der *Graphennorm*

$$\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

(iii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A)$ und alle $x \in X$, $y \in Y$ mit $x_n \to x$ in X und $Ax_n \to y$ in Y gilt $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

Notation: Wir schreiben $[D(A)] := (D(A), \|\cdot\|_A)$. Es gilt dann $A \in \mathcal{L}([D(A)], Y)$.

Beweis. Nach Definition ist Abgeschlossenheit von A äquivalent zur Abgeschlossenheit von $\mathrm{Gr}(A)$, und da $X \times Y$ ein Banachraum ist , ist dies äquivalent zur Vollständigkeit von $\mathrm{Gr}(A)$. Da die Abbildung

$$J : [D(A)] \to \mathrm{Gr}(A), x \mapsto (x, Ax),$$

linear, bijektiv und isometrisch ist, ist letzteres äquivalent dazu, dass $[D(A)]$ ein Banachraum ist. Andererseits bedeutet Abgeschlossenheit von $\mathrm{Gr}(A)$ in $X \times Y$:

> für jede Folge (x_n, Ax_n) in $\mathrm{Gr}(A)$ und $(x, y) \in X \times Y$ mit $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ gilt $(x, y) \in \mathrm{Gr}(A)$,

was offensichtlich äquivalent zu (iii) ist. □

Beispiele: 1) Sei $X = Y = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $A := \frac{d}{dx}$ mit $D(A) := C^1[0,1]$. Dann ist A abgeschlossen: Wenn $f_n \to f$ und $f_n' \to g$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, dann ist $f \in C^1[0,1]$ und $f' = g$ [$\to$ Analysis I, zum Beweis schreibe für festes $t \in [0,1]$:

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f_n'(s)\, ds;$$

nach Voraussetzung gilt $f_n(t) \to f(t)$, $f_n(0) \to f(0)$ und (wegen gleichmäßiger Konvergenz $f_n' \to g$) weiter $\int_0^t f_n'(s)\, ds \to \int_0^t g(s)\, ds$; somit gilt

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\, ds, \quad t \in [0,1],$$

woraus folgt $f \in C^1$, $f' = g$.]

2) Sei $X = Y = L^1[0,1]$, $A := \frac{d}{dx}$ mit $D(A) = C^1[0,1]$. Dann ist A *nicht* abgeschlossen: Wir nehmen $g \in L^1[0,1] \setminus C[0,1]$, etwa $g = 1_{[1/2,1]} - 1_{[0,1/2)}$. Approximiere g in $\|\cdot\|_1$ durch eine Folge (g_n) in $C[0,1]$. Dann setze

$$f(t) := |t - \frac{1}{2}| \quad \text{und} \quad f_n(t) := \frac{1}{2} + \int_0^t g_n(s)\, ds.$$

Wir erhalten $f_n \in C^1[0,1]$ und $f_n' = g_n \to g$ in $\|\cdot\|_1$, $f_n \to f$ in $\|\cdot\|_\infty$, insbesondere also $f_n \to f$ in $\|\cdot\|_1$. Es gilt aber $f \notin D(A)$. [Als konkrete g_n kann man hier

$$g_n(t) := \begin{cases} -1 & , t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ n(t - \frac{1}{2}) & , |t - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{n} \\ 1 & , t \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}, \quad n \geq 3,$$

nehmen.]

3) Sei $X = L^1[0,1]$, $Y = \mathbb{C}$, $Af := f(0)$ mit $D(A) = C[0,1]$. Dann ist A nicht abgeschlossen: Setze $f_n(t) := (1-nt)1_{[0,1/n]}(t)$. Dann gilt $f_n \to 0 =: f$ in $\|\cdot\|_1$ und $Af_n = f_n(0) = 1 \to 1$. Hier ist $f \in D(A)$, aber $Af = f(0) = 0 \neq 1$.

Kommentar: $L^1[0,1]$ ist ein Banachraum , dessen Elemente Äquivalenzklassen von Funktionen sind, die fast überalle (f.ü.) übereinstimmen. Genau genommen wird hier $C[0,1]$ als Menge der Äquivalenzklassen in $L^1[0,1]$ betrachtet, die eine stetige Funktion enthalten. Diese stetige Funktion ist dann in ihrer Klasse eindeutig, und A ist Auswertung dieser Funktion im Punkt 0. Ähnlich muss $C^1[0,1]$ als Teilraum von $L^1[0,1]$ in Beispiel 2) oben interpretiert werden.

4) Sei $p \in [1,\infty]$, $X = Y = L^p(\Omega,\mu)$, wobei (Ω,μ) ein σ-endlicher Maßraum ist. Sei $m : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und

$$Af := mf \text{ mit } D(A) := \{f \in L^p(\Omega,\mu) : mf \in L^p(\Omega,\mu)\}.$$

Dann ist A abgeschlossen: Gilt $f_n \to f$ und $mf_n \to g$ bzgl. $\|\cdot\|_p$, so finden wir Teilfolgen mit $f_{k(n)} \to f$ und $mf_{k(l(n))} \to g$ fast überall. Somit ist $mf = g$ f.ü., und wegen $g \in L^p$ haben wir $f \in D(A)$, $Af = g$.

Der folgende Satz gehört in den Zusammenhang des Satzes von der offenen Abbildung.

1.3. Satz von abgeschlossenen Graphen: Sei $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann gilt

$$A \text{ ist abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist beschränkt.}$$

Beweis. "$\Longleftarrow$" folgt mittels Lemma 1.2, da die Bedingung (iii) klar ist. Zum Beweis von "$\Longrightarrow$": Nach Lemma 1.2 ist X ein Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_A \geq \|\cdot\|_X$. Nach dem Isomorphiesatz von Banach sind $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_A$ auf X äquivalent und wir finden also ein $C > 0$ so, dass für alle $x \in X$ gilt

$$\|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|x\|_A \leq C\|x\|_X.$$

Somit ist $A : X \to Y$ beschränkt mit $\|A\| \leq C$. □

Notation: Seien A und B lineare Operatoren von X nach Y und sei C ein linearer Operator von Y nach Z. Wir definieren

$$\begin{aligned} A+B \quad &\text{by} \quad (A+B)x := Ax + Bx \text{ for } x \in D(A+B) := D(A) \cap D(B), \\ CA \quad &\text{by} \quad (CA)x := C(Ax) \text{ for } x \in D(CA) := \{\tilde{x} \in D(A) : A\tilde{x} \in D(C)\}. \end{aligned}$$

$A + B$ ist ein linearer Operator von X nach Y, und CA ist ein linearer Operator von X nach Z.

Summe und Produkt von linearen Operatoren sind assoziativ, aber im allgemeinen nicht distributiv. Im allgemeinen sind Summen oder Produkte von abgeschlossenen Operatoren nicht abgeschlossen.

Beispiel: Sei $X = l^1$. Definiere den Operator A für $x = (x_k)$ durch: $(Ax)_k = kx_{k-1}$, falls k gerade ist, und $(Ax)_k = 0$, falls k ungerade ist, und setze $D(A) := \{x \in l^1 : Ax \in l^1\}$. Ende Di 17.04.18

Dann ist A abgeschlossen: Ist $x^{(n)}$ eine Folge in $D(A)$ mit $x^{(n)} \to x$ und $Ax^{(n)} \to y$, dann gilt $x_k = \lim_n x_k^{(n)}$ für jedes k, und $y_k = \lim_n kx_{k-1}^{(n)}$ für gerades k, $y_k = 0$ für ungerades k. Somit ist $y_k = kx_{k-1}$ für gerade k. Also gilt $Ax = y$ und $x \in D(A)$ wegen $y \in l^1$.

Hingegen sind $B := A + (-A) = 0$ mit $D(B) = D(A)$ und $C := AA = 0$ mit $D(C) = D(A)$ nicht abgeschlossen (sonst wäre $D(A)$ abgeschlossener Teilraum von l^1, aber $D(A) \neq l^1$ ist dicht in l^1).

1.4. Lemma (Eigenschaften abgeschlossener Operatoren): Sei A ein abgeschlossener linearer Operator von X nach Y, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Z, X)$. Dann gilt:

(a) $B := A + T$ ist abgeschlossen (hier ist $D(B) = D(A)$).

(b) $C := AS$ ist abgeschlossen (hier ist $D(C) = \{z \in Z : Sz \in D(A)\}$).

(c) Ist A injektiv, dann ist A^{-1} abgeschlossen (hier ist $D(A^{-1}) = R(A)$).

(d) Ist R ist injektiv und abgeschlossen von Y nach Z mit $R^{-1} \in \mathcal{L}(Z, Y)$, dann ist $D := RA$ abgeschlossen (hier ist $D(D) = \{x \in D(A) : Ax \in D(R)\}$).

Beweis. (a) Sei (x_n) in $D(A)$ mit $x_n \to x$, $Bx_n \to y$. Da T beschränkt ist, gilt $Tx_n \to Tx$. Dann impliziert $(A + T)x_n \to y$ jedoch $Ax_n \to y - Tx$. Da A abgeschlossen ist, erhalten wir $x \in D(A)$ und $Ax = y - Tx$, dh $Bx = y$.

(b) Sei (z_n) eine Folge in $D(C)$ mit $z_n \to z$, $Cz_n \to y$. Da S beschränkt ist, folgt $Sz_n \to Sz$, $A(Sz_n) \to y$. Aber (Sz_n) ist Folge in $D(A)$, also haben wir $Sz \in D(A)$, $A(Sz) = y$ wegen Abgeschlossenheit von A. Wir haben gezeigt $z \in D(C)$, $Cz = y$.

(c) folgt aus $\mathrm{Gr}(A^{-1}) = \{(y, x) : (x, y) \in \mathrm{Gr}(A)\}$.

(d) Sei (x_n) Folge in $D(D)$ mit $x_n \to x$ und $Dx_n \to z$. Wegen $R^{-1} \in \mathcal{L}(Z, Y)$ haben wir $Ax_n = R^{-1}Dx_n \to R^{-1}z$. Da A abgeschlossen ist und $D(D) \subset D(A)$, erhalten wir $x \in D(A)$ und $Ax = R^{-1}z \in R(R^{-1}) = D(R)$. Somit gilt $x \in D(D)$ und $Dx = z$. □

1.5. Definition (Spektrum und Resolvente): Sei $A : X \supseteq D(A) \to X$ ein linearer Operator. Dann heißt

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \to X \text{ ist bijektiv und } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

die *Resolventenmenge* von A und

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

heißt *Spektrum* von A. Die Abbildung

$$\rho(A) \to \mathcal{L}(X), \quad \lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1},$$

heißt *Resolvente* von A, und für $\lambda \in \rho(A)$ heißt der Operator

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

Resolvente(noperator) (an der Stelle λ).

Bemerkung: Üblicherweise schreibt man $\lambda - A$, $(\lambda - A)^{-1}$ statt $\lambda I - A$, $(\lambda I - A)^{-1}$. Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt

$$(\lambda - A)R(\lambda, A) = I_X, \quad R(\lambda, A)(\lambda - A) = I_{D(A)}.$$

Weitere Bemerkungen: (a) Ist $\rho(A) \neq \emptyset$, dann ist A abgeschlossen.

(b) Ist A abgeschlossen, so gilt $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \to X \text{ is bijektiv}\}$.

Beweis. (a) Wir finden $\lambda_0 \in \rho(A)$. Dann ist $-R(\lambda_0, A) = -(\lambda_0 - A)^{-1}$ ageschlossen. Nach 1.4(c) ist $A - \lambda_0 I$ abgeschlossen, und nach 1.4(a) ist $A = (A - \lambda_0 I) + \lambda_0 I$ abgeschlossen.

(b) "$\subseteq$" ist klar. Zum Beweis von "$\supseteq$" sei $\lambda - A : D(A) \to X$ ist bijektiv. Nach 1.4(a) ist $\lambda - A$ abgeschlossen, und nach 1.4(c) ist $(\lambda - A)^{-1} : X \to X$ abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen erhalten wir $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, dh $\lambda \in \rho(A)$. $\square$

Beispiele: 1) $X = C[0, 1]$, $A = \frac{d}{dx}$, $D(A) = C^1[0, 1]$. Wir wissen schon, dass A abgeschlossen ist. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $f := e^{\lambda(\cdot)} \in D(A)$ und $Af = f' = \lambda e^{\lambda(\cdot)} = \lambda f$, also ist $\lambda - A : D(A) \to X$ nicht injektiv. Wir haben $\sigma(A) = \mathbb{C}$ gezeigt.

2) $X = C[0, 1]$, $A_0 = \frac{d}{dx}$, $D(A_0) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = 0\}$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in C[0, 1]$. Nach bekannten Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen hat das Anfangswertproblem

$$\lambda f - f' = g \text{ in } [0, 1]; \quad f(0) = 0,$$

eine eindeutige Lösung $f \in C^1[0, 1]$, gegeben durch $f(t) := -\int_0^t e^{\lambda(t-s)} g(s)\, ds$, $t \in [0, 1]$. Also ist $\lambda - A_0 : D(A_0) \to X$ bijektiv. Da A_0 abgeschlossen ist(!), haben wir gezeigt $\sigma(A_0) = \emptyset$, $\rho(A) = \mathbb{C}$. Außerdem gilt

$$|f(t)| \leq \int_0^t e^{Re\,\lambda(t-s)} |g(s)|\, ds \leq \int_0^1 e^{Re\,\lambda s}\, ds\, \|g\|_\infty = \begin{cases} \frac{e^{Re\,\lambda} - 1}{Re\,\lambda} \|g\|_\infty & , Re\,\lambda \neq 0 \\ \|g\|_\infty & , Re\,\lambda = 0 \end{cases},$$

also

$$\|R(\lambda, A_0)\| \leq \begin{cases} \frac{e^{Re\,\lambda} - 1}{Re\,\lambda} & , Re\,\lambda \neq 0 \\ 1 & , Re\,\lambda = 0 \end{cases}.$$

Beachte dass dies $\sigma(A_0) = \emptyset$ zeigt, ohne dass die Abgeschlossenheit von A_0 verwendet wird.

1.6. Satz (Eigenschaften der Resolvente): Sei A ein abgeschlossener linearer Operator in X. Dann gilt:

(a) Für alle $\lambda, \mu \in \rho(A)$:

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \quad (\textit{Resolventengleichung}).$$

Insbesondere gilt $R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$ für alle $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

(b) Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt $B(\lambda, 1/\|R(\lambda, A)\|) \subseteq \rho(A)$ und

$$R(\mu, A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R(\lambda, A)^{k+1} (\mu - \lambda)^k, \quad \mu \in B(\lambda, 1/\|R(\lambda, A)\|),$$

wobei die Reihe in Operatornorm konvergiert. Insbesondere ist $\rho(A)$ offen und $\sigma(A)$ ist abgeschlossen, und für jedes $\lambda \in \rho(A)$ gilt

$$\|R(\lambda, A)\| \geq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))}.$$

Beweis. (a) Schreibe

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = R(\lambda, A) \underbrace{(\mu - A)R(\mu, A)}_{=I_X} - \underbrace{R(\lambda, A)(\lambda - A)}_{=I_{D(A)}} R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

(b) Für jedes $\mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mu - A = \mu - \lambda + \lambda - A = ((\mu - \lambda)R(\lambda, A) + I)(\lambda - A).$$

Für $|\mu - \lambda| < 1/\|R(\lambda, A)\|$ ist der Operator

$$I + (\mu - \lambda)R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$$

invertierbar in $\mathcal{L}(X)$ durch eine Neumannreihe und

$$(I + (\mu - \lambda)R(\lambda, A))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R(\lambda, A)^k (\mu - \lambda)^k.$$

Für diese μ erhalten wir, dass $\mu - A : D(A) \to X$ bijektiv ist und dass

$$(\mu - A)^{-1} = R(\lambda, A)(I + (\mu - \lambda)R(\lambda, A))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R(\lambda, A)^{k+1} (\mu - \lambda)^k$$

gilt. $\square$

Ende Do
19.04.18

— — Einschub: Holomorphie — —

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und X ein komplexer Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt *holomorph* (oder *analytisch*) in Ω, wenn für jedes $z_0 \in \Omega$ der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. In diesem Falle heißt die Funktion $f' : \Omega \to X$ die (komplexe) *Ableitung* von f.

Bemerkung: Eine holomorphe Funktion ist stetig:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) \to f(z_0) + f'(z_0) \cdot 0 \qquad (z \to z_0).$$

Potenzreihen: Eine (formale) *Potenzreihe* in X hat die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

wobei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in X ist und $z_0 \in \mathbb{C}$.

Konvergenzradius: Definiere $R \in [0, \infty]$ durch $\frac{1}{R} := \limsup_{k \to \infty} \|a_k\|_X^{1/k}$. Dann konvergiert die Potenzreihe oben absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $B(z_0, R)$ und definiert eine holomorphe Funktion f auf $B(z_0, R)$ mit der Eigenschaft

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Für kein $\tilde{R} > R$ kann f zu einer holomorphen Funktion auf $B(z_0, \tilde{R})$ fortgesetzt werden.

Beweis. Sei $\varepsilon \in (0, R/2)$. Wir finden $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|a_k\|^{1/k} \leq \frac{1}{R - \varepsilon} \text{ für alle } k \geq k_0.$$

Für $|z - z_0| \leq R - 2\varepsilon$ haben wir dann

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \|a_k\| |z - z_0|^k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{R} - 2\varepsilon}{\tilde{R} - \varepsilon} \right)^k < \infty.$$

Differenzierbarkeit zeigt man wie für skalarwertige Potenzreihen.

Nun sei $\tilde{R} \geq R$ so, dass f eine holomorphe Fortsetzung $g : B(z_0, \tilde{R}) \to X$ hat. Für beliebiges $\varphi \in X'$ ist dann die Funktion $\varphi \circ g : B(z_0, \tilde{R}) \to \mathbb{C}$ analytisch und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(a_k)(z - z_0)^k$$

konvergiert für alle $|z - z_0| < \tilde{R}$. Somit gilt für jedes $\delta \in (0, \tilde{R})$:

$$\sup_k |\varphi(a_k)|(\tilde{R} - \delta)^k < \infty.$$

Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gilt dann

$$C_\delta := \sup_k \|a_k\|(\tilde{R} - \delta)^k < \infty \text{ für jedes } \delta \in (0, \tilde{R}),$$

woraus folgt

$$\|a_k\|^{1/k} \leq \frac{C_\delta^{1/k}}{\tilde{R} - \delta} \text{ für all } \delta \in (0, \tilde{R}),\ k \in \mathbb{N},$$

und weiter

$$\frac{1}{R} = \limsup_k \|a_k\|^{1/k} \leq \frac{1}{\tilde{R} - \delta} \text{ für alle } \delta \in (0, \tilde{R}).$$

Für $\delta \to 0$ erhalten wir $\tilde{R} \leq R$. □

Bemerkung: Der Beweis zeigt die beiden Zugänge für holomorphe Funktionen mit Werten in einem Banachraum: Man kann zum einen wie für komplexwertige Funktionen vorgehen, zum underen kann man lineare Funktionale anwenden und auf die Komposition die bekannten Ergebnisse für komplexwertige Funktionen anwenden.

Folgendes sei zur Übung überlassen:

Satz: Eine Funktion $f : \Omega \to X$ ist holomorph genau dann, wenn sie *schwach holomorph* ist, dh wenn $\varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist für jedes $\varphi \in X'$.

— — **Ende des Einschubs** — —

1.7. Lemma: Sei (c_n) eine reelle Folge mit $0 \leq c_{n+m} \leq c_n c_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Denn gilt $\sqrt[n]{c_n} \to c := \inf_k \sqrt[k]{c_k}$ für $n \to \infty$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden m mit $\sqrt[m]{c_m} < c+\varepsilon$. Setze $b := \max\{c_1, \ldots, c_m\}$ und schreibe $n > m$ als $n = km + r$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt

$$c_n^{1/n} = (c_{km+r})^{1/n} \leq (c_m^k c_r)^{1/n} \leq (c+\varepsilon)^{km/n} b^{1/n} = (c+\varepsilon)(c+\varepsilon)^{-r/n} b^{1/n} \leq c + 2\varepsilon$$

für große n wegen $(c+\varepsilon)^{-r/n} b^{1/n} \to 1$, $n \to \infty$ (hier haben wir ohne Einschränkung $b > 0$ angenommen). □

1.8. Korollar: Ist A ein abgeschlossener linearer Operator in X, so ist die Resolvente $\rho(A) \to \mathcal{L}(X)$, $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$, eine holomorphe Funktion und es gilt

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda, A) = (-1)^k k! R(\lambda, A)^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt

$$d(\lambda, \sigma(A)) = \frac{1}{\inf_k \|R(\lambda, A)^k\|^{1/k}}. \qquad (+)$$

Beweis. Der erste Teil ist klar wegen 1.6(b) und der Holomorphie von Potenzreihen. Wir weden 1.7 auf $c_k := \|R(\lambda, A)^k\|$ an und sehen, dass die rechte Seite von (+) der Konvergenzradius R der Potenzreihe in 1.6(b) ist. Nach dem Einschub gilt $\partial B(\lambda, R) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ (andernfalls wäre die Resolvente auf einer echt größeren Kreisscheibe holomorph, was ein Widerspruch ist). □

1.9. Satz und Definition: Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ und $X \neq \{0\}$. Dann gilt $\sigma(T) \neq \emptyset$, und für den *Spektralradius* $r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ *von* T gilt

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} = \inf_k \|T^k\|^{1/k}.$$

Insbesondere ist das Spektrum $\sigma(T)$ eine nicht-leere, kompakte Teilmenge von $\overline{B}(0, r(T)) \subseteq \overline{B}(0, \|T\|)$.

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass für $|\lambda| > \|T\|$ gilt

$$\lambda I - T = \lambda\Big(I - \frac{T}{\lambda}\Big),$$

und dass wir diesen Operator durch die Neumannreihe

$$(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \lambda^{-(k+1)}$$

invertieren können. Der letzte Ausdruck ist eine Potenzreihe in λ^{-1} mit Konvergenzradius $R := 1/\inf_k \|T^k\|^{1/k}$, konvergiert also für alle $|\lambda| > 1/R$. Somit gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{B}(0, 1/R)$, dh $r(T) \leq 1/R$. Die obigen Aussagen zu Potenzreihen zeigen außerdem, dass $r(T) = 1/R$ für $1/R > 0$.

Wir zeigen nun: $\sigma(T) = \emptyset \Rightarrow X = \{0\}$ (im Falle $X \neq \{0\}$, $r(T) = 0$ ist dann $\sigma(T) = \{0\}$). Aus der Potenzreihendarstellung oben erhalten wir auch $R(\lambda, T) \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$. Ist $\sigma(T) = \emptyset$, so ist für jedes $\varphi \in \mathcal{L}(X)'$, die Funktion $\lambda \to \varphi \circ R(\lambda, T)$ ganz und beschränkt (da sie gegen 0 geht für $|\lambda| \to \infty$). Nach dem Satz von Liouville ist diese Funktion konstant, also konstant $= 0$. Wir haben also $\varphi \circ R(\lambda, T) = 0$ für jedes λ und jedes φ. Nach Hahn-Banach ist dann $R(\lambda, T) = 0$, folglich $X = \{0\}$. □

Bemerkung: Es gibt Operatoren T mit $\|T\| = 1$, $r(T) = 0$ und somit $\sigma(T) = \{0\}$, z.B. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $X = \mathbb{C}^2$ mit der Euklidischen Norm.

Ende Di
24.04.18

1.10. Definition (Feinstruktur des Spektrums): Sei A ein abgeschlossener linearer Operator in X. Wir definieren

$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ is nicht injektiv}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - A) \neq \{0\}\}$ (*Punktspektrum*).

Jedes $\lambda \in \sigma_p(A)$ heißt *Eigenwert von* A und jedes $x \in N(\lambda I - A) \setminus \{0\}$ heißt *Eigenvektor* zum Eigenwert λ. Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned}
\sigma_r(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : R(\lambda I - A) \text{ ist nicht dicht in } X\} \ (\textit{Residualspektrum}) \\
\sigma_c(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : R(\lambda I - A) \text{ ist dicht aber nicht abgeschlossen in } X\} \ (\textit{stetiges Spektrum}) \\
\sigma_{ap}(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ es gibt eine Folge } (x_n) \text{ in } D(A) \text{ mit } \|x_n\| = 1 \text{ für alle } n \\
&\qquad\qquad \text{und } (\lambda I - A)x_n \to 0\} \ (\textit{approximatives Punktspektrum}).
\end{aligned}$$

Eine Folge (x_n) wie in der Definition des approximativen Punktspektrum heißt manchmal ein *approximativer Eigenwert*.

Bemerkung: $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_{ap}(A)$ (setze $x_n = x$, wobei x Eigenvektor).

Beispiele: 1) Ist $\dim X < \infty$ und $A \in \mathcal{L}(X)$, dann gilt $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \sigma_r(A)$ (A ist eine endlich-dimensionale Matrix, für die Injektivität äquivalent zu Surjektivität ist).

2) Sei $X = C[0,1]$, $A = \frac{d}{dx}$ mit $D(A) = C^1[0,1]$. Wir haben oben gesehen, dass $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \mathbb{C}$. Andererseits hat für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\lambda f - f' = g$ eine (nicht-eindeutige) Lösung $f \in C^1[0,1]$ für jede rechte Seite $g \in C[0,1]$. Also gilt $R(\lambda I - A) = X$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\sigma_r(A) = \sigma_c(A) = \emptyset$.

1.11. Satz: Sei A ein abgeschlossener linearer Operator in X. Dann gilt:

(a) $\sigma_{ap}(A) = \sigma_p(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ ist injektiv und } (\lambda I - A)^{-1} \text{ ist nicht beschränkt}\}$.

(b) $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_r(A)$.

(c) $\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_{ap}(A)$.

Beweis. (a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und sei $\lambda - A$ injektiv, $Y := R(\lambda - A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& (\lambda - A)^{-1} : Y \to X \text{ ist nicht beschränkt} \\
\Leftrightarrow\ & \text{es gibt } (y_n) \text{ in } Y \text{ mit } \|y_n\| = 1 \text{ und } \|(\lambda - A)^{-1} y_n\| \to \infty \\
\Leftrightarrow\ & \text{es gibt } (z_n) \text{ in } Y \text{ mit } z_n \to 0 \text{ und } \|(\lambda - A)^{-1} z_n\| = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{es gibt } (x_n) \text{ in } D(A) \text{ mit } \|x_n\| = 1 \text{ und } (\lambda - A)^{-1} x_n \to 0
\end{aligned}$$

Zum Beweis setze $z_n = y_n / \|(\lambda - A)^{-1} y_n\|$, $y_n = z_n / \|z_n\|$ bzw. $x_n = (\lambda - A)^{-1} z_n$, $z_n = (\lambda - A)x_n$. Wir haben also gezeigt

$$\sigma_{ap}(A) \setminus \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ ist injektiv und } (\lambda I - A)^{-1} \text{ ist nicht beschränkt}\}.$$

(b) "$\supseteq$" ist klar. Zum Beweis von "$\subseteq$" sei $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{ap}(A)$. Nach (a) ist $\lambda - A$ injektiv und $(\lambda - A)^{-1}$ ist beschränkt. Insbesondere ist $R(\lambda - A)$ abgeschlossen in X. Also gilt $\overline{R(\lambda - A)} = R(\lambda - A) \neq X$ (sonst $\lambda \notin \sigma(A)$!). Wir haben $\lambda \in \sigma_r(A)$ gezeigt.

(c) Sei $\lambda \in \partial\sigma(A)$. Wir finden eine Folge (λ_n) in $\rho(A)$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Nach 1.6(b) haben wir $\|R(\lambda_n, A)\| \to \infty$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit finden wir $y \in X$ so, dass $\alpha_n := \|R(\lambda_n, A)y\| \to \infty$ (bjedeste, dass $\alpha_n > 0$ für jedes n). Sei $x_n := R(\lambda_n, A)y/\alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$. Denn ist (x_n) eine Folge in $D(A)$ mit $\|x_n\| = 1$ für alle n. Weiter gilt

$$(\lambda - A)x_n = (\lambda - \lambda_n)x_n + (\lambda_n - A)x_n = (\lambda - \lambda_n)x_n + y/\alpha_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

Beispiel: Sei $X = l^2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|(x_n)\|l^2 := \left(\sum_n |x_n|^2\right)^{1/2} < \infty\}$ und sei $L \in \mathcal{L}(l^2)$ der *Linksshift* gegeben durch $L(x_n) := (x_{n+1})$, dh $L(x_n) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Dann gilt $\|L\| = 1$, $\|L^k\| = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, und somit $r(L) = 1$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$ gilt

$$(\lambda - L)(x_n) = 0 \Leftrightarrow \forall n : \lambda x_n - x_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \forall n : x_{n+1} = \lambda^n x_1.$$

Für $|\lambda| < 1$ ist $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \in l^2$, also $\lambda \in \sigma_p(L)$. Für $|\lambda| = 1$ ist $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \notin l^2$, und $\lambda \notin \sigma_p(L)$.

Folglich ist $\sigma_p(L) = \{|\lambda| < 1\}$, $\sigma(L) = \sigma_{ap}(L) = \{|\lambda| \leq 1\}$, und $\sigma_{ap}(L) \setminus \sigma_p(L) = \{|\lambda| = 1\} = \partial\sigma(L)$.

1.12. Duale Operatoren: Wir erinnern daran, dass für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ der *duale* (oder *adjungierte*) *Operator* [1] $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ gegeben ist durch

$$T'\phi := \phi \circ T, \quad \phi \in Y'.$$

Mit der *Dualitätsklammer*

$$\langle y, \phi \rangle_{Y \times Y'} := \phi(y), \quad \text{für alle } y \in Y,\ \phi \in Y',$$

kann man dies schreiben als

$$\langle x, T'\phi \rangle_{X \times X'} = \langle Tx, \phi \rangle_{Y \times Y'} \quad \text{für alle } x \in X,\ \phi \in Y',$$

Beispiel: Sei $X = Y = l^2$ und sei L der Linksshift. Wir berechnen L'. Für $X = l^2$ gilt $X' = l^2$, wobei die Dualitätsklammer gegeben ist durch

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle_{l^2 \times l^2} = \sum_n x_n y_n.$$

[1] In der Vorlesung bezeichnet wir als "Adjungierte" nur die *Hilbertraum-Adjungierte* und sprechen deshalb hier vom "dualen Operator".

Für $(x_n), (y_n) \in l^2$ ist dann

$$\langle L(x_n), (y_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}y_n = \sum_{n=2}^{\infty} x_n y_{n-1} = \langle (x_n), (y_{n-1})\rangle,$$

wenn wir $y_0 := 0$ setzen. Also gilt $L' = R$, wobei R der *Rechtsshift* ist, der durch

$$R(y_n) := (0, y_1, y_2, y_3, \ldots)$$

gegeben ist. Offensichtlich gilt $\|R(y_n)\|_{l^2} = \|(y_n)\|_{l^2}$, $\|R\| = 1$, $r(T) = 1$, und $\sigma(R) \subseteq \{|\lambda| \leq 1\}$. Für $|\lambda| \leq 1$ gilt

$$(\lambda - R)(y_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda y_1 = 0, \forall n \geq 2 : \lambda y_n = y_{n-1} \Leftrightarrow (y_n) = 0.$$

Somit ist $\sigma_p(R) = \emptyset$.

Rechenregeln für duale Operatoren: Folgende Regeln sind leicht zu überprüfen:

$$(I_X)' = I_{X'}, \quad (S+T)' = S' + T', \quad (\alpha T)' = \alpha T', \quad (ST)' = T'S'$$

wobei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ für die Summe bzw. $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ für das Produkt.

Lemma: Für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ gilt

$$T : X \to Y \text{ ist ein Isomorphismus} \Longleftrightarrow T' : Y' \to X' \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

In diesem Falle gilt $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

Erinnerung: Der *Bidualraum* $X'' = (X')' = \mathcal{L}(X', \mathbb{C})$ von X ist ein Banachraum, und die Abbildung

$$J : X \to X'', \; x \mapsto \delta_x \quad \text{wobei } \delta_x : X' \to \mathbb{C}, \phi \mapsto \delta_x(\phi) := \phi(x)$$

ist (nach Hahn-Banach) eine isometrische Injektion. Mit Dualitätsklammern geschrieben ist also

$$\langle \phi, \delta_x\rangle_{X' \times X''} = \langle x, \phi\rangle_{X \times X'}, \quad x \in X, \phi \in X'.$$

Üblicherweise identifiziert man X mit dem abgeschlossenen Teilraum $J(X)$ von X''. Der Raum X heißt *reflexiv*, wenn $J(X) = X''$.

Für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist $T'' := (T')' \in \mathcal{L}(X'', Y'')$ und $T = T''|_X$, denn für $x \in X$, $\phi \in Y'$ gilt

$$\langle \phi, T''\delta_x\rangle = \langle T'\phi, \delta_x\rangle = \langle x, T'\phi\rangle = \langle Tx, \phi\rangle = \langle \phi, \delta_{Tx}\rangle,$$

also $T''\delta_x = \delta_{Tx}$ für alle $x \in X$, dh $T''x = Tx$, $x \in X$, wenn wir X und $J(X)$ identifizieren.

Ende Do 26.04.18

Beweis. "$\Rightarrow$": Es ist

$$T'(T^{-1})' = (T^{-1}T)' = (I_X)' = I_{X'}, \quad (T^{-1})'T' = (TT^{-1})' = (I_Y)' = I_{Y'},$$

woraus Invertierbarkeit von T' folgt und $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

"$\Leftarrow$": Wir nehmen an, dass T' eine Inverse $S : X' \to Y'$ hat. Dann ist $T'' := (T')'$ ein Isomorphismus $X'' \to Y''$ nach dem soeben Gezeigten. Da X ein abgeschlossener Teilraum von X'' ist, ist $T''(X)$ abgeschlossener Teilraum von Y''. Aber $T''(X) = T(X) \subseteq Y$, also ist $T(X)$ abgeschlossener Teilraum von Y.

Ist $\phi \in X'$ mit $\phi|_{T(X)} = 0$, so ist

$$\langle x, T'\phi\rangle = \langle Tx, \phi\rangle = 0, \quad x \in X,$$

dh $T'\phi = 0$. Da T' injektiv ist, folgt $\phi = 0$. Nach Hahn-Banach haben wir also gezeigt, dass $T(X)$ dicht in Y ist. Da $T(X)$ auch abgeschlossen in Y ist, erhalten wir $T(X) = Y$, dh T ist surjektiv.

Da T'' injektiv ist, ist auch $T = T''|_X$ injektiv. Wir haben gezeigt, dass $T : X \to Y$ bijektiv ist. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $T : X \to Y$ ein Isomorphismus. $\square$

1.13. Definition: Sei A ein linearer Operator von X nach Y mit $D(A)$ dicht in X. Wir definieren den linearen Operator $A' : Y' \supseteq D(A') \to X'$ durch: Für $\phi \in Y'$, $\psi \in X'$ setzen wir

$$\phi \in D(A'), A'\phi = \psi :\Longleftrightarrow \forall x \in D(A) : \langle Ax, \phi\rangle_{Y \times Y'} = \langle x, \psi\rangle_{X \times X'}.$$

Dann ist $D(A')$ die Menge aller $\phi \in Y'$, für welche die Abbildung

$$D(A) \to \mathbb{C},\ x \mapsto \langle Ax, \phi\rangle,$$

eine stetige Fortsetzung $\psi \in X'$ besitzt. Wegen der Dichtheit von $D(A)$ in X ist diese Fortsetzung eindeutig bestimmt (wenn sie existiert). In diesem Falle ist $A'\phi$ diese eindeutig bestimmte Fortsetzung ψ.

Bemerkung: A' ist **immer** abgeschlossen: Sei (ϕ_n) eine Folge in $D(A')$ mit $\phi_n \to \phi$ in Y' und $A'\phi_n \to \psi$ in X'. Dann gilt für jedes $x \in D(A)$:

$$\langle Ax, y\rangle = \lim_n \langle Ax, \phi_n\rangle = \lim_n \langle x, A'\phi_n\rangle = \langle x, \psi\rangle,$$

das bedeutet $\phi \in D(A')$ und $A'\phi = \psi$.

Beispiel: $X = L^2(0,1)$, $A = \frac{d}{dx}$, $D(A) = C_0^1[0,1] := \{\varphi \in C^1[0,1] : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$. Dann ist

$$D(A') = \{f \in L^2(0,1) : \exists g \in L^2(0,1) \forall \varphi \in C_0^1[0,1] : \int_0^1 f\varphi'\,dx = \int_0^1 g\varphi\,dx\}.$$

Mittels partieller Integration erhalten wir $C^1[0,1] \subseteq D(A')$ und $A'f = -f$ für $f \in C^1[0,1]$: Für $\varphi \in C_0^1[0,1]$ gilt

$$\int_0^1 f\varphi'\,dx = f\varphi\Big|_0^1 - \int_0^1 f'\varphi\,dx = -\int_0^1 f'\varphi\,dx.$$

Tatsächlich ist $D(A')$ die Menge aller $f \in L^2(0,1)$, die eine *schwache Ableitung* $g \in L^2(0,1)$ haben, und $A'f = -f'$, wobei f' die schwache Ableitung von f bezeichnet.

Rechenregeln: $(\lambda - A)' = \lambda - A'$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $X = Y$ (allgemein gilt $(A+T)' = A' + T'$ für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$). Ist B eine Fortsetzung von A, so ist A' eine Fortsetzung von B': $A \subseteq B$ $\Rightarrow B' \subseteq A'$. Hierbei schreiben wir $A \subseteq B$, falls $\mathrm{Gr}(A) \subseteq \mathrm{Gr}(B)$ (wir identifizieren hier also die linearen Operatoren A und B jeweils mt ihrem Graph).

1.14. Satz: Sei A ein abgeschlossener linearer Operator in X, der dicht definiert ist. Dann gilt $\sigma(A') = \sigma(A)$ und $\sigma_p(A') = \sigma_r(A)$.

Beweis. Wir beweisen zunächst die zweite Aussage. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} &\lambda \in \sigma_r(A) \;\Leftrightarrow\; \overline{(\lambda - A)X} \neq y \;\Leftrightarrow\; \exists \phi \in Y' \setminus \{0\} \forall x \in D(A) : \langle (\lambda - A)x, \phi\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\;& \exists \phi \in D(A') \setminus \{0\} : (\lambda - A')\phi = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \sigma_p(A'). \end{aligned}$$

$\sigma(A') \subseteq \sigma(A)$: Sei $\lambda \in \rho(A)$. Nach dem eben Gezeigten ist $\lambda \notin \sigma_r(A) = \sigma_p(A')$, und folglich ist $\lambda - A'$ injektiv. Sei nun $\psi \in X'$. Setze $\phi := R(\lambda, A)'\psi$. Für $x \in D(A)$ gilt dann

$$\langle (\lambda - A)x, \phi\rangle = \langle R(\lambda, A)(\lambda - A)x, \psi\rangle = \langle x, \psi\rangle.$$

Also ist $\phi \in D((\lambda - A)') = D(A')$ und $(\lambda - A')\phi = \psi$. Somit ist $\lambda - A'$ ist auch surjektiv, und $\lambda \in \rho(A)$ ist gezeigt.

$\sigma(A) \subseteq \sigma(A')$: Sei $\lambda \in \rho(A')$. Dann gilt $\lambda \notin \sigma_p(A') = \sigma_r(A)$, und somit ist $Y := (\lambda - A)(D(A))$ dicht in X.

Wir setzen $S := R(\lambda, A') \in \mathcal{L}(X')$. Dann ist $S' \in \mathcal{L}(X'')$ und wir definieren $R := S'|_X$. Wir zeigen, dass $R \in \mathcal{L}(X)$ die Inverse von $\lambda - A$ ist. Für $x \in D(A)$ und $\phi \in X'$ haben wir

$$\langle \phi, S'\delta_{(\lambda - A)x}\rangle = \langle S\phi, \delta_{(\lambda - A)x}\rangle = \langle (\lambda - A)x, S\phi\rangle.$$

Wegen $S\phi \in D(A')$ erhalten wir

$$\langle (\lambda - A)x, S\phi\rangle = \langle x, (\lambda - A')S\phi\rangle = \langle x, \phi\rangle = \langle \phi, \delta_x\rangle.$$

Also haben wir gezeigt $S'\delta_{(\lambda - A)x} = \delta_x$ für alle $x \in D(A)$. Folglich bildet R das dichte Bild von $\lambda - A$ nach X ab, und wir erhalten $R \in \mathcal{L}(X)$. Außerdem ist $R(\lambda - A)x = x$ für alle $x \in D(A)$. Somit ist $\lambda - A$ injektiv und $Ry = (\lambda - A)^{-1}y$ für alle $y \in Y$. Insbesondere ist $(\lambda - A)^{-1}$ ein beschränkter Operator. Da dieser Operator auch abgeschlossen ist, ist sein Definitonsbereich Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Da Y dicht in X ist, erhalten wir $Y = X$, und weiter $\lambda \in \rho(A)$ und $R = R(\lambda, A)$. □ Ende Do 03.05.18

Beispiel: Sei $X = l^2$, L der Linksshift und R der Rechtsshift. Wegen $L' = R$ gilt dann $\sigma_r(L) = \sigma_p(R) = \emptyset$.

Zwischen dem Spektrum eines Operators und dem Spektrum seiner Resolventen gibt es einen natürlichen Zusammenhang, der als *spectral mapping* bezeichnet wird.

1.15. Satz: Sei A ein abgeschlossener linearer Operator in X und $\lambda_0 \in \rho(A)$. Dann gilt

$$\sigma(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{\lambda_0 - z} : z \in \sigma(A) \right\}.$$

Außerdem gilt $0 \in \sigma(R(\lambda_0, A))$ genau dann, wenn $A \notin \mathcal{L}(X)$ ist.

Beweis. Wir haben

$$0 \notin \sigma(R(\lambda_0, A)) \;\Leftrightarrow\; R(\lambda_0, A) : X \to X \text{ surjektiv } \;\Leftrightarrow\; D(A) = X \;\Leftrightarrow\; A \in \mathcal{L}(X),$$

wobei wir für die letzte Äquivalenz den Satz vom abgeschossenen Graphen verwendet haben. Sei nun $z \neq \lambda_0$. Dann gilt

$$z-A = z-\lambda_0+\lambda_0-A = ((z-\lambda_0)R(\lambda_0, A)+I)(\lambda_0-A) = \left(R(\lambda_0, A)-\frac{1}{\lambda_0 - z}\right)(z-\lambda_0)(\lambda_0-A),$$

wobei $(z-\lambda_0)(\lambda_0-A) : D(A) \to X$ bijektiv ist. Somit ist $z-A : D(A) \to X$ bijektiv genau dann, wenn $R(\lambda_0, A) - (\lambda_0 - z)^{-1} : X \to X$ bijektiv ist. Wir erhalten so, dass $z \in \sigma(A)$ äquivalent zu $(\lambda_0 - z)^{-1} \in \sigma(R(\lambda_0, A))$ ist. □

Bemerkung: Im Beweis haben wir gesehen, dass für $\lambda_0, z \in \rho(A)$ mit $z \neq \lambda_0$ gilt:

$$\left(\frac{1}{\lambda_0 - z} - R(\lambda_0, A)\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda_0 - z}(\lambda_0 - A)R(z, A).$$

Was kann man machen, wenn ein linearer Operator A von X nach Y nicht abgeschlossen ist? Natürlich kann man den Abschluss $\overline{\mathrm{Gr}(A)}$ von Gr(A) in $X \times Y$ betrachten. Das ist jedoch im allgemeinen nicht der Graph eines Operators.

1.16. Definition: Ein linearer Operator A von X nach Y heißt *abschließbar*, falls er eine abgeschlossene lineare Fortsetzung $B : X \supset D(B) \to Y$ besitzt. In diesem Falle besitzt A eine kleinste abgeschlossene lineare Fortsetzung $\overline{A}$, welche *der Abschluss* von A heisst.

Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- A ist abschließbar,

- $\overline{\mathrm{Gr}(A)}$ ist der Graph einer Funktion,
- für jede Folge (x_n) in $D(A)$ mit $x_n \to 0$ in X und $Ax_n \to y$ in Y gilt $y = 0$.

In diesem Falle gilt $\mathrm{Gr}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Gr}(A)}$.

1.17. Satz: Sei A ein dicht definierter linearer Operator in X. Wenn $D(A')$ dicht ist in X', dann ist A abschließbar. Die Umkehrung gilt, falls X reflexiv ist.

Beweis. Wenn $D(A')$ dicht in X' ist, dann ist $A'' := (A')'$ ein abgeschlossener linearer Operator in X''. Wir zeigen, dass A'' eine Fortsetzung von A ist: Für $x \in D(A)$ und $\phi \in D(A')$ gilt

$$\langle Ax, \phi\rangle = \langle x, A'\phi\rangle = \langle A'\phi, \delta_x\rangle,$$

also ist $\delta_x \in D(A'')$ und $A''\delta_x = \delta_{Ax}$ für alle $x \in D(A)$.

Nun sei X reflexiv und $D(A')$ nicht dicht in X'. Nach Hahn-Banach finden wir $y \in X'' = X$ mit $y \neq 0$ und

$$\langle y, \phi\rangle = 0 = \langle 0, A'\phi\rangle \quad \text{für alle } \phi \in D(A').$$

Wir zeigen, dass $(0, y) \in \overline{\mathrm{Gr}(A)}$ gilt: Für $(\psi, \phi) \in X' \times X'$ mit $(\psi, \phi)|_{\mathrm{Gr}(A)} = 0$ gilt $\phi \in D(A')$ und $A'\phi = -\psi$. Nach der oben gezeigten Eigenschaft von y erhalten wir $(\psi, \phi)(0, y) = 0$. Mittels Hahn-Banach könne wir schließen, dass $(0, y) \in \overline{\mathrm{Gr}(A)}$ wie bahauptet. Wegen $y \neq 0$ ist A nicht abschließbar. $\square$

2 Die Fouriertransformation auf dem $\mathbb{R}^d$

Wir schreiben

$$L^p(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \|f\|_p := \Big(\int |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} < \infty\}$$

für$1 \le p < \infty$.

2.1. Definition: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$\hat f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\,dx,$$

wobei $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_d\xi_d$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Die Funktion $\hat f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt *Fouriertransformierte von* f.

2.2. Lemma: (a) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat f$ beschränkt und gleichmäßig stetig und

$$\|\hat f\|_\infty \le \|f\|_1.$$

Die Abbildung $f \to \hat f$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Für $\tau_y f := f(\cdot - y)$ gilt dann $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-2\pi i y\xi}\hat f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(c) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\lambda > 0$ gilt $\int \hat f(\xi) g(\lambda\xi)\,d\xi = \int f(\lambda x)\hat g(x)\,dx$.

Beweis. (a) Die Abschätzung ist klar. Für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned} |\hat f(\xi) - \hat f(\xi+\eta)| &\le \int |e^{-2\pi i x\xi} - e^{-2\pi i x(\xi+\eta)}|\,|f(x)|\,dx \\ &= \int |1 - e^{-2\pi i x\eta}|\,|f(x)|\,dx \text{ indep. of } \xi. \end{aligned}$$

Wegen $1 - e^{-2\pi i x\eta} \to 0$ $(\eta \to 0)$ für festes $x \in \mathbb{R}^d$ und $|1 - e^{-2\pi i x\eta}| \le 2$ konvergiert das Integral nach dem Satz über majorisierte Konvergenz gegen 0 für $\eta \to 0$. Also ist $\hat f$ gleichmäßig stetig.

(b) Wir substituieren $x = u + y$ und erhalten

$$\int e^{-2\pi i x\xi} f(x-y)\,dx = e^{-2\pi i y\xi}\int e^{-2\pi i u\xi} f(u)\,du = e^{-2\pi i y\xi}\hat f(\xi).$$

(c) Wir substituieren $x = \lambda y$ und $\lambda\xi = \eta$ und erhalten nach Fubini

$$\int\int e^{-2\pi i x\xi} f(x) g(\lambda\xi)\,dx\,d\xi = \int f(\lambda y)\underbrace{\int e^{-2\pi i y\eta} g(\eta)\,d\eta}_{=\hat g(y)}\,dy.$$

$\square$

2.3. Beispiel: Sei $d = 1$ und $h = 1_{[a,b]}$. Dann gilt $\hat{h}(0) = b - a$ und für $\xi \neq 0$:

$$\hat{h}(\xi) = \int_a^b e^{-2\pi i x\xi}\, dx = \frac{e^{-2\pi i b\xi} - e^{-2\pi i a\xi}}{-2\pi i\xi}.$$

Somit $\hat{h}(\xi) \to 0$ $(|\xi| \to \infty)$, aber $\hat{h} \notin L^1(\mathbb{R})$!

Für $d > 1$ und $h(x) = 1_{\prod_{j=1}^n [a_j,b_j]}(x) = \prod_{j=1}^n 1_{[a_j,b_j]}(x_j)$ gilt

$$\hat{h}(\xi) = \prod_{j=1}^n \widehat{1_{[a_j,b_j]}}(\xi_j), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^d.$$

Also erhalten wir auch hier $\hat{h}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.

Ende Di 08.05.18

2.4. Riemann-Lebesgue-Lemma: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt $\hat{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.

Beweis. Der Raum

$$C_0(\mathbb{R}^d) := \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ stetig} : f(x) \to 0 \ (|x| \to \infty) \}$$

ist bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein abgeschlossener Teilraum des Banachraums

$$BUC(\mathbb{R}^d) := \{ g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : \ g \text{ ist beschränkt und gleichmäßig stetig} \}.$$

Nach Beispiel 2.3 gilt $\hat{h} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ für Funktionen h der Form $h = \sum_k c_k 1_{Q_k}$, wobei die Q_k kartesische Produkte von kompakten Intervallen sind. Die Menge dieser Trepenfunktionen ist dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$, und wir verwenden 2.2 (a). □

2.5. Rechenregeln: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann glt:

(a) Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt $\mathscr{F}(F(a\cdot))(\xi) = \frac{1}{|a|^n} \hat{f}(\frac{\xi}{a})$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(b) Ist $b \in \mathbb{R}^d$, so gilt $\mathscr{F}(e^{2\pi i b(\cdot)} f)(\xi) = \hat{f}(\xi - b)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(c) Ist zusätzlich $x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so hat $\hat{f}$ eine stetige partielle Ableitung nach ξ_j und

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) = \mathscr{F}(x \mapsto (-2\pi i x_j) f(x))(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis. Der Beweis von (a) ist ähnlich wie für 2.2(c). Zum Beweis von (b) schreiben wir

$$\int \underbrace{e^{-2\pi i\xi x} e^{2\pi i b x}}_{= e^{-2\pi i(\xi - b)x}} f(x)\, dx = \hat{f}(\xi - b).$$

zu (c): Für $\xi \in \mathbb{R}^d$, $j \in \{1, \dots, d\}$ und $h \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\hat{f}(\xi + h e_j) - \hat{f}(\xi)}{h} - \mathscr{F}(x \mapsto (-2\pi i x_j) f(x))(\xi) \\ = \ &\int \Big(\frac{e^{-2\pi i(\xi + h e_j)x} - e^{-2\pi i \xi x}}{h} + 2\pi i x_j e^{-2\pi i \xi x} \Big) f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Für festes $x \in \mathbb{R}^d$ geht der Term in Klammern gegen 0 für $h \to 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i\xi x}\Big(\frac{e^{-2\pi i h x_j}-1}{h}+2\pi i x_j\Big) &= e^{-2\pi i\xi x}\Big(\frac{1}{h}\int_0^h (-2\pi i x_j)e^{-2\pi i t x_j}\,dt+2\pi i x_j\Big) \\ &= e^{-2\pi i\xi x}2\pi i x_j\Big(1-\frac{1}{h}\int_0^h e^{-2\pi i t x_j}\,dt\Big). \end{aligned}$$

Dabei ist der Betrag des letzten Terms in Klammern ≤ 2. Die Aussage folgt mittels majorisierter Konvergenz. □

2.6. Satz (schwache Ableitungen unter Fouriertransformation): Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und sei $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\int f(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int g(x)\varphi(x)\,dx$$

für alle $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ (dh für alle $\varphi \in C^1$ mit kompaktem Träger). Dann gilt

$$\hat{g}(\xi) = 2\pi i\xi_j\hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Bemerkung: Die Voraussetzung besagt, dass f eine schwache Ableitung nach x_j in $L^1(\mathbb{R}^d)$ hat. Das gilt insbesondere, wenn f stetig differenzierbar ist und $g := \partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist.

Beweis. Sei $\xi \in \mathbb{R}^d$. Die Idee ist, $\varphi(x) = e^{-2\pi i x\xi}$ zu nehmen, aber $\varphi \notin C_c^1$. Also approximieren wir diese Funktion. Wähle $\psi \in C_c^1$ mit $0 \leq \psi \leq 1$ und $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und setze $\psi_k(x) := \psi(x/k)$ und $\varphi_k(x) := e^{-2\pi i x\xi}\psi_k(x)$. Majorisierte Konvergenz gibt

$$\int g\varphi_k\,dx = \int g(x)e^{-2\pi i x\xi}\psi_k(x)\,dx \to \hat{g}(\xi)$$

da $\psi_k(x) \to 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und $|\psi_k| \leq 1$. Außerdem gilt wegen $\varphi_k \in C_c^1$:

$$\int g\varphi_k\,dx = -\int f\partial_j\varphi_k\,dx = \underbrace{-\int f(-2\pi i\xi_j)\varphi_k\,dx}_{\to 2\pi i\xi_j\hat{f}(\xi)} \underbrace{-\int f(x)e^{-2\pi i x\xi}\partial_j\psi_k(x)\,dx}_{=:A(k)}.$$

Dabei ist $\partial_j\psi_k(x) = \frac{1}{k}(\partial_j\psi)(x/k)$ und also

$$|A(k)| \leq \int_{|x|\geq k} |f(x)|\,dx \cdot \frac{1}{k} \cdot \|\partial_j\psi\|_\infty \to 0 \ (k \to \infty),$$

da $\partial_j\psi$ beschränkt ist. □

2.7. Beispiel: Für $\phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$, gilt

$$\hat{\phi}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Wegen $\phi(x) = \prod_{j=1}^n e^{-\pi|x_j|^2}$ reicht es, den Falle $d = 1$ zu betrachten. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi'(x) = -2\pi x\phi(x).$$

Nach 2.5(c) und 2.6 erhalten wir für jedes $\xi \in \mathbb{R}$:

$$2\pi i\xi\hat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi'}(\xi) = -\widehat{2\pi x\phi(x)}(\xi) = -i\frac{d}{d\xi}\hat{\phi}(\xi),$$

also

$$(\hat{\phi})'(\xi) = -2\pi\xi\hat{\phi}(\xi).$$

Somit lösen ϕ und $\hat{\phi}$ dieselbe gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung. Da Lösungen des Anfangswertproblems eindeutig sind, folgt

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(0)\phi(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}, \xi \in \mathbb{R},$$

wegen $\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|^2}\,dx = 1$.

2.8. Fourier-Inversionsformel: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Bemerkung: Die Formel gilt tatsächlich für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ($\to$ später).

Beweis. Nach 2.2(b) reicht es, den Falle $x = 0$ zu betrachten. Sei $h(x) := e^{-\pi|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Nach 2.2(c) gilt für jedes $a > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)h(a\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(ax)\hat{h}(x)\,dx.$$

Für $a \to 0+$ geht die linke Seite gegen $\int \hat{f}(\xi)\,d\xi$ (verwende majorisierte Konvergenz und die Voraussetzung $\hat{f} \in L^1$). Da f in 0 stetig ist, konvergiert der Integrand rechts punktweise gegen $f(0)\hat{h}(x)$. Da f beschränkt ist, folgt mittels majorisierter Konvergenz die Konvergenz der rechten Seite gegen $f(0)\int \hat{h}(x)\,dx = f(0)$. $\square$

2.9. Example: $f(x) = e^{-a|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei $a > 0$. Es gilt

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\xi x}e^{-a|x|}\,dx$$

und

$$\int_0^\infty e^{-2\pi i x\xi} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a+2\pi i\xi}, \quad \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i x\xi} e^{ax}\,dx = \int_0^\infty e^{2\pi i y\xi} e^{-ay}\,dy = \frac{1}{a-2\pi i\xi}.$$

Also ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a+2\pi i\xi} + \frac{1}{a-2\pi i\xi} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f ist stetig und beschränkt und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. also gilt nach 2.8:

$$\mathscr{F}\Big(x \mapsto \frac{2a}{a^2+4\pi^2x^2}\Big)(\xi) = e^{-a|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

2.10. Definition und Satz (Faltung): Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Für fast jedes $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $y \mapsto f(y)g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, und für h, gegeben durch

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^d,$$

gilt $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Die Funktion h heißt *Faltung von f und g* (engl. *convolution*) und wird mit $f*g$ bezeichnet.

Beweis. Die Funktion $F : (x,y) \mapsto f(y)g(x-y)$ ist messbar und

$$\int\int |f(y)g(x-y)|\,dx\,dy = \int |f(y)| \underbrace{\int |g(x-y)|\,dx}_{=\|g\|_1}\,dy = \|f\|_1\|g\|_1.$$

Nach Fubini-Tonelli gilt somit $F \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, $F(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}^d$, und $x \mapsto \int F(x,y)\,dy \in L^1(\mathbb{R}^d)$. □

2.11. Lemma: Die Faltung $* : L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$ ist bilinear und stetig, kommutativ und assoziativ. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Beweis. Bilinearität und Stetigkeit sind klar wegen 2.10. Kommutativität und Assoziativität folgen mittels Fubini. Wir zeigen die Formel. Nach Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int e^{-2\pi i x\xi} f*g(x)\,dx &= \int\int e^{-2\pi i x\xi} f(y)g(x-y)\,dx\,dy \\ &= \int e^{-2\pi i y\xi} f(y) \underbrace{\int e^{-2\pi i(x-y)\xi} g(x-y)\,dx}_{=\hat{g}(\xi)}\,dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□ Ende Di 15.05.18

2.12. Lemma: Für $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt die Fourier-Inversionsformel 2.8. Insbesondere gilt $f, \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Setze $h(x) := e^{-\pi|x|^2}$ und $h_n(x) := n^d h(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sowie $f_n := h_n * f$. Dann gilt (nach FA) $f_n \to f$ in $\|\cdot\|_1$ und mittels monotoner Konvergenz gilt $\hat{f}_n = \hat{h}_n \hat{f} \to \hat{f}$ in $\|\cdot\|_1$ (man berechne $\hat{h}_n$). Außerdem sieht man direkt

$$\|f_n\|_\infty = \|h_n * f\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty \|f\|_1 < \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wieder nach FA ist f_n stetig. Wir können also die Formel aus 2.8 auf die f_n anwenden und erhalten mittels 2.2:

$$f_n = \mathscr{F}(\hat{f}_n)(-\cdot) \longrightarrow \mathscr{F}(\hat{f})(-\cdot) \quad \text{bzgl. } \|\cdot\|_\infty.$$

Wegen $f_n \to f$ in $\|\cdot\|_1$ folgt $f = \mathscr{F}(\hat{f})(-\cdot)$ fast überall. □

2.13. Satz (Plancherel): Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2.$$

Beweis. Wegen $\|g\|_2^2 \leq \|g\|_\infty \|g\|_1$ erhalten wir aus 2.12: $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Nach 2.2 (dancing hat) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) (\overline{\hat{\psi}})^\wedge(x) \, dx,$$

und mittels 2.8 erhalten wir

$$(\overline{\hat{\psi}})^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi x} \overline{\hat{\psi}(\xi)} \, d\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi x} \hat{\psi}(\xi) \, d\xi} = \overline{\psi(x)}.$$

□

2.14. Satz: Setze $S := \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$. Die Fouriertransformation $S \to S$, $f \mapsto \hat{f}$, besitzt eine eindeutige stetige Fortsetzung $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Diese Fortsetzung $\mathscr{F}$ ist linear und bijektiv, und es gilt

$$\|\mathscr{F} f\|_2^2 = \|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

und

$$\mathscr{F}^{-1} f = \sigma \mathscr{F} f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \qquad \mathscr{F}^4 = \mathrm{Id}_{L^2}.$$

Beweis. Wir müssen nur einsehen, dass S dicht ist in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Dafür reicht es, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger durch Funktionen aus S zu approximieren. Das geht mit Mollifiern. □

2.15. Definition: Der *Schwartzraum* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ist gegeben durch

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) := \{\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : \ \psi \text{ ist } C^\infty \text{ und } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d : x \mapsto x^\beta \partial^\alpha \psi(x) \text{ beschränkt}\},$$

wobei wir hier die Multiindexnotation verwenden: Für $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d), \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d$ setzt man

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha &:= \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}, \\
|\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d, \\
\alpha! &:= \alpha_1! \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!, \\
\beta \leq \alpha &:\Leftrightarrow \beta_1 \leq \alpha_1, \beta_2 \leq \alpha_2, \ldots, \beta_d \leq \alpha_d, \\
\binom{\alpha}{\beta} &:= \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \binom{\alpha_d}{\beta_d}, \beta \leq \alpha, \\
x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}, x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Multiindexnotation ist praktisch, wenn man mit Ableitungen beliebiger Ordnung arbeiten muss. Es gilt z.B. die *Leibnizregel* für Produkte

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma \varphi \partial^{\alpha - \gamma} \psi,$$

die man durch Induktion nach $|\alpha|$ zeigen kann.

Bemerkung: Für $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ und jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gilt offensichtlich, dass $\partial^\alpha \psi$ und $x \mapsto x^\alpha \psi(x)$ zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ gehören.

2.16. Satz: Für alle $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\varphi \cdot \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Nach der Leibnizregel gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$:

$$x^\beta \partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \underbrace{x^\beta \partial^\gamma \varphi}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\partial^{\alpha-\gamma} \psi}_{\text{beschränkt}} .$$

□

2.17. Satz: Die Fouriertransformation $\psi \mapsto \hat{\psi}$ ist linear und bijektiv $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Zur Übung empfohlen. □

2.18. Satz: Für $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\varphi * \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Die Aussage folgt wegen $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\psi}$ aus den Sätzen 2.17 und 2.16. □

2.19. Heisenbergsche Unschärferelation: Sei $d = 1$. Für $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\|x\psi\|_2 \|\xi\hat{\psi}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}\|\psi\|_2^2.$$

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
2Re\,\langle x\psi, \psi'\rangle &= \langle x\psi, \psi'\rangle + \langle \psi', x\psi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)\overline{\psi'(x)} + \psi'(x)\overline{x\psi(x)}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} x\left(\psi(x)\overline{\psi'(x)} + \psi'(x)\overline{\psi(x)}\right)\,dx \\
&= x|\psi(x)|^2\Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx \\
&= -\|\psi\|_2^2.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{2}\|\psi\|_2^2 = |Re\,\langle x\psi, \psi'\rangle| \leq \|x\psi\|_2\|\psi'\|_2.$$

Mithilfe von Plancherel erhalten wir

$$\|\psi'\|_2 = \|\widehat{\psi'}\|_2 = 2\pi\|\xi\hat{\psi}\|_2.$$

□

Korollar: Für $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ und $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|(x - x_0)\psi\|_2\|(\xi - \xi_0)\hat{\psi}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}\|\psi\|_2^2.$$

Ende Do 17.05.18

Interpretation: Sei $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ mit $\|\psi\|_2 = 1$. Dann sind $x \mapsto |\psi(x)|^2$ und $\xi \mapsto |\hat{\psi}(\xi)|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}$. Sind X, Y Zufallsvariablen, die entsprechend verteilt sind, und $x_0 = E(X) = \int x|\psi(x)|^2\,dx$, $\xi_0 = E(Y) = \int \xi|\hat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi$, dann sind $\|(x-x_0)\psi\|_2 = \sigma_X$ und $\|(\xi - \xi_0)\hat{\psi}\|_2 = \sigma_Y$ die Standardabweichungen von X bzw. Y, und die Aussage des Korollars bedeutet

$$\sigma_X\sigma_Y \geq \frac{1}{4\pi},$$

dh X und Y können nicht beide beliebig nahe um x_0 bzw. ξ_0 lokalisiert sein.

3 Fredholmoperatoren und die Spektraltheorie kompakter Operatoren

Wieder sind X und Y Banachräume, wenn nichts anderes gesagt wird.

Erinnerung (Lineare Algebra): Wenn $\dim X = \dim \mathrm{Y} < \infty$ und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, dann gilt

$$\dim N(T) = \underbrace{\operatorname{codim} R(T)}_{=:\dim Y/R(T)} < \infty.$$

3.1. Definition: Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt *Fredholmoperator*, falls

$$\alpha(T) := \dim N(T) < \infty \text{ und } R(T) \text{ abgeschlossen ist mit } \beta(T) := \operatorname{codim} R(T) < \infty.$$

In diesem Falle wird der *Index von* T definiert durch

$$\operatorname{ind} T := \alpha(T) - \beta(T).$$

Die Menge aller Fredholmoperatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $\Phi(X, Y)$.

Bemerkung: Ist $\dim X = \dim Y < \infty$, so ist jeder Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Fredholmoperator vom Index 0. Sind X und Y beliebig und ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Isomorphismus von X nach Y, so gilt $\alpha(T) = \beta(T) = 0$ und T ist ein Fredholmoperator vom Index 0.

Der folgende Satz zeigt, dass in der Definition oben die Abgeschlossenheit des Bildes $R(T)$ nicht gefordert werden muss.

3.2. Satz: Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Wenn $\operatorname{codim} R(T) < \infty$ ist, dann ist $R(T)$ abgeschlossen.

Beweis. Wir finden eine Basis $[y_1], \ldots, [y_n]$ von $Y/R(T)$ und setzen $H := \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Dann gilt $Y = R(T) + H$ und $R(T) \cap H = \{0\}$. Da H vollständig ist, ist $X \times H$ ein Banachraum (zB für die Summennorm) und die Abbildung

$$\widetilde{T} : X \times H \to Y,\ (x, y) \mapsto Tx + y$$

ist stetig und surjektiv. Nach dem Satz von der offenen Abbildung gilt

$$\gamma := \inf \left\{ \frac{\|\widetilde{T}(x, y)\|_Y}{d((x, y), N(T))} : (x, y) \notin N(\widetilde{T}) \right\} > 0.$$

Wegen

$$N(\widetilde{T}) = \{(x, y) \in X \times H : Tx = -y\} = \{(x, 0) : Tx = 0\} = N(T) \times \{0\}$$

gilt für $x \notin N(T)$:

$$\|Tx\|_Y = \|\widetilde{T}(x, 0)\|_Y \geq \gamma d((x, 0), N(\widetilde{T})) = d(x, N(T)).$$

Daraus folgt die Abgeschlossenheit von $R(T)$. □

Bemerkung: Wir erinnern daran, dass für einen Banachraum Y und einen abgeschlossenen linearen Teilraum Z der *Quotientenraum* Y/Z, gegeben durch

$$Y/Z := \{y + Z : y \in Y\}, \|y + Z\|_{Y/Z} := \inf\{\|y - z\|_Y : z \in Z\} = d(y, Z).$$

ein Banachraum ist. Wenn aus dem Kontext klar ist, was Z ist, schreibt man üblicherweise $[y]$ statt $y + Z$ und q für die *Quotienteabbildung* $Y \to Y/Z$, $y \mapsto [y]$. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ hat eine eindeutige Faktorisierung $T = S \circ q$, wobei $S \in \mathcal{L}(X/N(T), Y)$ injektiv ist und $q : X \to X/N(T)$ die Quotientenabbildung ist. S ist gegeben durch $S[x] = Tx$.

Bemerkung: (a) Seien W und Z Teilräume eines Banachraumes X mit $W \cap Z = \{0\}$ und $X = W + Z$. Wir schreiben $X = W \oplus Z$, wenn W und Z beide abgeschlossene Teilräume von X sind. Beachte, dass $X = W \oplus Z$ geau dann, wenn $W \times Z \to X$, $(w, z) \mapsto w + z$, ein Isomorphismus ist bzw. genau dann, wenn es eine Projektion $P \in \mathcal{L}(X)$ gibt mit $P(X) = Z$ und $N(P) = W$.

Ein abgeschlossener Teilraum Z heißt *komplementiert* in X, wenn es einen (abgeschlossenen) Teilraum W von X mit $X = W \oplus Z$. Ein solches W heißt *Komplement von* Z *(in* X*)*.

Beachte, dass wir im Beweis von 3.2 gezeigt haben, dass H ein Komplement von $R(T)$ in Y ist.

(b) Jeder endlich-dimensionale Teilraum Z von X ist komplementiert in X: Wähle eine Basis $z_1, \dots, z_n$ von Z und lineare Funktionale $\psi_1, \dots, \psi_n \in Z'$ so, dass $\psi_j(x_k) = \delta_{jk}$. Setze die ψ_k mithilfe von Hahn-Banach fort zu $\phi_1, \dots, \phi_n \in X'$. Dann ist $W := \bigcap_{k=1}^n N(\phi_k)$ ein Komplement von Z in X: W ist abgeschlossen, $W \cap Z = \{0\}$ und $X = W + Z$ (für $x \in X$ setze $z := \sum_{j=1}^n \phi_j(x) z_j \in Z$ und $w := x - z$, dann ist $\phi_k(w) = \phi_k(x) - \phi_k(z) = 0$ für jedes k und also $w\|W\|$).

(c) Für jeden Fredholmoperator $T \in \Phi(X, Y)$ ist also $N(T)$ komplementiert in X und $R(T)$ ist komplementiert in Y.

3.3. Satz: $\Phi(X, Y)$ ist offen in $\mathcal{L}(X, Y)$ und $\operatorname{ind} : \Phi(X, Y) \to \mathbb{Z}$ ist stetig.

Beweis. Sei $T \in \Phi(X, Y)$. Wir zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass für alle $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ gilt

$$\|S - T\| < \varepsilon \implies S \in \Phi(X, Y) \text{ und } \operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T.$$

Zunächst finden wir abgeschlossenene Teilräume G von X und H von Y mit

$$X = N(T) \oplus G,\ Y = R(T) \oplus H,\ \dim H < \infty.$$

Beachte $R(T) = T(X) = T(G)$. Für jedes $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ definieren wir

$$\widehat{S} : G \times H \to Y, \quad (g, h) \mapsto Sg + h.$$

Dann gilt für beliebige $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$:

$$\|\widehat{S}_1 - \widehat{S}_2\| = \sup_{\|(g,h)\|=1} \|S_1 g + h - (S_2 g + h)\| \leq \|S_1 - S_2\|.$$

Wir werden zeigen, dass $\widehat{T} : G \times H \to Y$ ein Isomorphismus ist: $\widehat{T}$ ist surjektiv wegen $R(T) = T(G)$ und der Wahl von H, und $\widehat{T}$ ist injektiv, da aus $\widehat{T}(g,h) = 0$ folgt $Tg = -h \in R(T) \cap H = \{0\}$ und $T|_G$ injektiv ist. Somit finden wir $\varepsilon > 0$ so, dass jedes $\tilde{S} \in \mathcal{L}(G \times H, Y)$ mit $\|\tilde{S} - \widehat{T}\| < \varepsilon$ ein Isomorphismus $\tilde{S} : G \times H \to Y$ ist.

Sei nun $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|S - T\| < \varepsilon$. Dann ist auch $\|\widehat{S} - \widehat{T}\| < \varepsilon$ und $\widehat{S} : G \times H \to Y$ somit ein Isomorphismus. Wir zeigen nun Ende Di 22.05.18

(i) $\alpha(S) \leq \alpha(T) < \infty$,

(ii) $\beta(S) \leq \beta(T) < \infty$,

(iii) $\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(T)$.

(i): If $g \in N(S) \cap G$ then $\widehat{S}(g,0) = 0$, und $g = 0$. Hence $N(S) \cap G = \{0\}$ und

$$\alpha(S) = \dim N(S) = \dim\big((N(S) \oplus G)/G\big) \leq \dim(X/G) = \dim N(T) = \alpha(T) < \infty.$$

(ii): $G \times \{0\}$ ist abgeschlossen in $G \times H$, also ist $S(G) = \widehat{S}(G \times \{0\})$ abgeschlossen in Y. Da $\widehat{S}$ surjektiv ist, gilt $Y = S(G) + H$. Ist $y = S(g) \in S(G) \cap H$, so folgt $\widehat{S}(g, -y) = S(g) - S(g) = 0$ und $g = 0$, $y = 0$, da $\widehat{S}$ injektiv ist. Somit ist $S(G) \oplus H = Y = T(G) \oplus H$ und

$$\beta(S) = \operatorname{codim} R(S) \leq \operatorname{codim} S(G) = \operatorname{codim} T(G) = \operatorname{codim} R(T) = \beta(T) < \infty.$$

(iii): Wir haben schon eingesehen, dass $N(S) \oplus G$ ein abgeschlossener Teilraum von X von endlicher Kodimension ist. Wir finden also einen Teilraum W von X mit $\dim W < \infty$ und $X = W \oplus N(S) \oplus G$. Es gilt dann

$$\alpha(T) = \dim N(T) = \dim N(S) \oplus \dim W = \alpha(S) + \dim W.$$

Andererseits ist

$$S(G) \subseteq S(X) = S(G \oplus W) = S(G) \oplus S(W)$$

da beide Teilräume auf der rechten Seite abgeschlossen sind und ihr Schnitt trivial ist (denn $S|_{G \oplus W}$ ist injektiv). Somit erhalten wir

$$\beta(T) = \operatorname{codim} T(X) \overset{\text{(ii)}}{=} \operatorname{codim} S(G) = \operatorname{codim} S(X) + \dim S(W) = \beta(S) + \dim W,$$

und schließlich

$$\operatorname{ind} T = \alpha(T) - \beta(T) = \alpha(S) + \dim W - (\beta(S) + \dim W) = \operatorname{ind} S,$$

womit der Beweis beendet ist. □

3.4. Kompakte Operatoren: Nach FA heißt ein linearer Operator $T : X \to Y$ *kompakt*, falls $\overline{T(B_X)}$ kompakt in Y ist, wobei $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in X bezeichnet. Die Menge aller kompakten linearen Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(X, Y)$. Eigenschaften:

- Jeder kompakte lineare Operator $T : X \to Y$ ist beschränkt, dh $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$.
- $\dim T(X) < \infty \Longrightarrow T$ ist kompakt.
- I_X ist kompakt $\Longleftrightarrow \dim X < \infty$.
- $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{L}(X, Y)$.
- Sind W, Z Banachräume und $S \in \mathcal{L}(W, X)$, $R \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, so gilt $RT \in \mathcal{K}(X, Z)$ und $TS \in \mathcal{K}(W, Y)$ (*Idealeigenschaft*).

Satz von Schauder: Für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ gilt: $T \in \mathcal{K}(X, Y) \Longleftrightarrow T' \in \mathcal{K}(Y', X')$.

Beweis. “$\Rightarrow$”: Sei T kompakt und (ψ_n) eine Folge in Y' mit $\|\psi_n\|_{Y'} \leq 1$. Setze $K := \overline{T(B_X)}$, was nach Voraussetzung eine kompakte Teilmenge von Y ist. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|T'\psi_n - T'\psi_m\|_{X'} &= \sup_{x \in B_X} |\langle x, T'(\psi_n - \psi_m)\rangle| = \sup_{x \in B_X} |\langle Tx, \psi_n - \psi_m\rangle| \\ &= \sup_{y \in K} |(\psi_n - \psi_m)(y)| = \|\psi_n|_K - \psi_m|_K\|_{C(K)}. \end{aligned}$$

Es reicht also, eine Teilfolge $(k(n))$ zu finden, für die $(\psi_{k(n)}|_K)$ eine Cauchyfolge in $C(K)$ ist. Die Menge $M := \{\psi_n|_K : n \in \mathbb{N}\}$ ist aber nach Arzela-Ascoli relativ kompakt in $C(K)$, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist zum einen $\|\psi_n|_K\|_{C(K)} = \|T'\psi_n\|_{X'} \leq \|T'\| = \|T\|$, zum anderen ist ψ_n Lipschitz-stetig mit Konstante ≤ 1, dh M ist beschränkt und gleichgradig stetig.

“$\Leftarrow$”: Sei T' kompakt. Nach dem eben Gezeigten ist $T'' : X'' \to Y''$ kompakt. Wegen $T''J_X = J_Y T$ ist $J_Y T$ kompakt. Da J_Y isometrisch ist, ist dann aber auch T kompakt. □

3.5. Satz: Sei $K \in \mathcal{K}(X)$. Dann gilt $I - K \in \Phi(X)$ und $\operatorname{ind}(I - K) = 0$.

Beweis. Auf $N := N(I - K)$ gilt $I_N = K|_N \in \mathcal{K}(N)$ und somit ist $\dim N < \infty$. Wir setze $T := I - K$ und zeigen, dass $R(T)$ abgeschlossen ist. Dazu faktorisieren wir $T = S \circ q$, wobei $q : X \to X/N$ die Quotientenabbildung ist und $S : X/N \to X$. Dann gilt $R(T) = R(S)$ und S ist injektiv. Wir behaupten, dass es ein $\eta > 0$ so gibt, dass $\|Sw\| \geq \eta\|w\|$ für alle $w \in X/N$. Das impliziert Abgeschlossenheit von $R(S) = R(T)$.

Wir nehmen an, ein solches η existiere nicht. Dann finden wir eine Folge (w_n) mit $\|w_n\| = 1$ und $Sw_n \to 0$, und eine Folge (x_n) in X mit $q(x_n) = w_n$, $\|x_n\| \leq 2$. Dann gilt $Tx_n = Sw_n \to 0$ und $d(x_n, N) = \|q(x_n)\| = 1$.

Da K kompakt ist, gilt $Kx_{k(n)} \to y \in X$ für eine Teilfolge, woraus folgt $x_n = Tx_n + Kx_n \to y$ und $Sw_n = Tx_n \to Ty$. Somit $Ty = 0$ und $y \in N$. Das widerspricht aber $d(y, N) = 1$.

Nach dem Satz von Schauder ist $K' \in \mathcal{K}(X')$, also ist $\dim N((I-K)') < \infty$. Da $R(I-K)$ abgeschlossen ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{codim} R(I-K) &= \dim X/R(I-K) = \dim (X/R(I-K))' \\ &= \dim \{\phi \in X' : \phi|_{R(I-K)} = 0\} = \dim (N(I-K)') < \infty.\end{aligned}$$

Es bleibt $\operatorname{ind}(I-K) = 0$ zu zeigen. Wir betrachten $\gamma : [0,1] \to \mathbb{Z}$, $t \mapsto \operatorname{ind}(I-tK) = 0$ (beachte $tK \in \mathcal{K}(X)$ und somit $I - tK \in \Phi(X)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$). Nach 3.3 ist γ stetig, also konstant und $\operatorname{ind}(I-K) = \gamma(1) = \gamma(0) = \operatorname{ind} I = 0$. □

Ende Do 24.05.18

3.6. Korollar: Sei $K \in \mathcal{K}(X)$ und $\dim X = \infty$. Dann gilt $0 \in \sigma(K)$ und für $\lambda \in \sigma(K)\setminus\{0\}$ ist $\lambda - K$ ein Fredholmoperator vom Index 0. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt insbesondere

$$\lambda - K \text{ ist injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda - K \text{ ist surjektiv.}$$

und, genauer noch, die folgende **Fredholmsche Alternative**:

Entweder: $(\lambda - K)x = 0$ hat nur die triviale Lösung; in diesem Falle hat $(\lambda - K)x = y$ für jedes $y \in X$ eine eindeutige Lösung,

oder: $(\lambda - K)x = 0$ hat genau $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängige Lösungen und die duale Gleichung $(\lambda - K')\phi = 0$ hat ebenfalls genau n linear unabhängige Lösungen; in diesem Falle hat $(\lambda - K)x = y$ Lösungen genau dann, wenn $\phi(y) = 0$ für jedes $\phi \in N(\lambda - K')$.

3.7. Korollar: Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein Isomorphismus von X nach Y und $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann gilt $T - K \in \Phi(X,Y)$ und $\operatorname{ind}(T-K) = 0$.

Beweis. Es ist $T^{-1}K \in \mathcal{K}(X)$, also nach Satz 3.5, $T^{-1}(T-K) = I_X - T^{-1}K \in \Phi(X)$ und $\operatorname{ind} T^{-1}(T-K) = 0$. Da T^{-1} ein Isomorphismus von Y nach X ist, folgt die Behauptung. □

Die Aussage in 3.7 ist der Schlüssel zu der folgenden wichtigen Störungseigenschaft von Fredholmoperatoren.

3.8. Satz: Sei $T \in \Phi(X,Y)$ und $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann gilt $T + K \in \Phi(X,Y)$ und $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$.

Beweis. Wir verwenden die Konstruktion und die Notationen aus dem Beweis von 3.3 und schreiben

$$X = N(T) \oplus G,\; Y = R(T) \oplus H,\; \dim H < \infty,$$

wobei G ein abgeschlossener Teilraum von X ist. Wir setzen $S := T - K$ und betrachten die Operatoren $\widehat{T}, \widehat{S} : G \times H \to Y$. Wieder ist $\widehat{T}$ ein Isomorphismus, und es gilt $\widehat{S} = \widehat{T} - \widetilde{K}$, wobei $\widetilde{K}(g,h) := Kg$. Der Operator $\widetilde{K}$ ist kompakt, nach 3.7 gilt also $\widehat{S} \in \Phi(G \times H, Y)$ und $\operatorname{ind} \widehat{S} = 0$, dh $\alpha(\widehat{S}) = \beta(\widehat{S})$. Offenbar ist

$$(N(S) \cap G) \times \{0\} = \{(g,0) \in G \times H : Sg = 0\} \subseteq N(\widehat{S}),$$

woraus folgt

$$\alpha(S) = \dim N(S) \leq \operatorname{codim} G + \alpha(\widehat{S}) = \alpha(T) + \alpha(\widehat{S}) < \infty.$$

Außerdem ist $\widehat{S}(G \times H) = S(G) + H$, und $S(G)$ hat endliche Kodimension und ist also nach 3.2 abgeschlossen. Wir erhalten

$$\beta(S) = \operatorname{codim} S(X) \leq \operatorname{codim} S(G) \leq \operatorname{codim} \widehat{S}(G \times H) + \dim H = \beta(\widehat{S}) + \beta(T) < \infty,$$

und $S(X)$ ist abgeschlossen nach 3.2.

Für die Berechnung des Index müssen wir genauer hinsehen. Wir setzen $G_0 := N(S) \cap G$, finden ein Komplement G_1 von G_0 in G, ein Komplement W_0 von G_0 in $N(S)$ und ein Komplement W_1 von $N(S) + G = W_0 \oplus G_0 \oplus G_1$ in X. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha(T) &= \dim W_1 + \dim W_0, \\
\beta(T) &= \dim H, \\
\alpha(S) &= \dim W_0 + \dim G_0, \\
\beta(S) &= \operatorname{codim} S(X) = \operatorname{codim} S(G_1) - \dim W_1,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\beta(\widehat{S}) &= \operatorname{codim}(S(G) + H) = \operatorname{codim} S(G) - \dim H + \dim(S(G) \cap H) \\
&= \operatorname{codim} S(G) - \dim H + \dim(S(G_1) \cap H).
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\dim(S(G_1) \cap H) = \dim\{g \in G_1 : Sg \in H\} = \dim \underbrace{\{(g,h) \in G_1 \times H : Sg = -h\}}_{=:V},$$

und V ist ein Komplement von $G_0 \times \{0\}$ in $N(\widehat{S})$. Wir erhalten so

$$\alpha(\widehat{S}) = \dim N(\widehat{S}) = \dim G_0 + \dim V = \dim G_0 + \dim(S(G_1) \cap H).$$

Wegen $\alpha(\widehat{S}) = \beta(\widehat{S})$ erhalten wir

$$\dim G_0 = \operatorname{codim} S(G_1) - \dim H.$$

Wir setzen alles zusammen und haben

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind} S &= \alpha(S) - \beta(S) \\
&= \dim W_0 + \dim G_0 - \operatorname{codim} S(G_1) + \dim W_1 \\
&= \alpha(T) - \operatorname{codim} S(G_1) + \dim G_0 \\
&= \alpha(T) - \dim H = \alpha(T) - \beta(T) = \operatorname{ind} T,
\end{aligned}$$

was den Beweis beendet. □

3.9. Satz: Sei $K \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$. Setze für jedes $k \in \mathbb{N}$: $N_k := N((\lambda - K)^k)$ und $R_k := R((\lambda - K)^k)$. Dann gilt

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$, sind N_k und R_k abgeschlossen und $\dim N_k = \operatorname{codim} R_k < \infty$.

(b) Es gibt ein kleinstes $p \in \mathbb{N}$ mit $N_p = N_{p+1}$.

(c) $N_{p+k} = N_p$ und $R_{p+k} = R_p$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

(d) $X = N_p \oplus R_p$, $(\lambda - K)N_p \subseteq N_p$, $((\lambda - K)|_{N_p})^p = 0$ und $\lambda - K : R_p \to R_p$ ist ein Isomorphismus.

Insbesondere gilt $\sigma(K) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_p(K)$.
Außerdem ist $\sigma(K) \setminus \{0\}$ endlich oder $\sigma(K) \setminus \{0\} = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $\lambda_n \to 0$.

Beweis. (a) Wegen $(\lambda - K)^k = \lambda^k(I - KM_k)$ mit $M_k \in \mathcal{L}(X)$ gilt nach 3.5, dass $(\lambda - K)^k \in \Phi(X)$ und $\operatorname{ind}(\lambda - K)^k = 0$.

(b) Andernfalls finden wir eine Folge (x_n) in X so, dass für jedes n gilt $x_n \in N_{n+1} \setminus N_n$ und $1 = d(x_n, N_n) \leq \|x_n\| \leq 2$. Für $n > m$ ist dann

$$\|Kx_n - Kx_m\| = \|\lambda x_n - \underbrace{((\lambda - K)x_n + Kx_m)}_{=:y}\|$$

und

$$(\lambda - K)^n y = (\lambda - K)^{n+1} x_n + K(\lambda - K)^n x_m = 0,$$

dh $y \in N_n$. Es folgt

$$\|Kx_n - Kx_m\| = \|\lambda x_n - y\| \geq |\lambda| d(x_n, N_n) = |\lambda| > 0,$$

im Widerspruch zu $K \in \mathcal{K}(X)$.

(c) Ist $(\lambda - K)^{p+2}x = 0$, so ist $(\lambda - K)x \in N_{p+1} = N_p$ und $(\lambda - K)^{p+1}x = 0$, dh $x \in N_{p+1} = N_p$. Wir haben $N_{p+2} = N_p$ gezeigt. Nun iterieren wir und verwenden (a).

(d) Für jedes k ist $\lambda - K : R_k \to R_{k+1}$ surjektiv. Also ist $\lambda - K : R_p \to R_p$ surjektiv. Nach 3.5 hat aber $(\lambda - K)|_{R_p} \in \Phi(R_p)$ Index 0, so dass $\lambda \in \rho(K|_{R_p})$. Andererseits gilt

$\lambda - K : N_{k+1} \to N_k$ für jedes k, somit $\lambda - K : N_p \to N_p$ und $((\lambda - K)|_{N_p})^p = 0$. Wegen $\dim N_p < \infty$ gibt Lineare Algebra $\sigma(K|_{N_p}) = \{\lambda\}$.

Wählen wir $\varepsilon > 0$ so, dass $B(0, \varepsilon) \subseteq \rho(K|_{R_p})$, so folgt $B(\lambda, \varepsilon) \setminus \{\lambda\} \subseteq \rho(K)$. Folglich ist 0 der einzig mögliche Häufungspunkt von $\sigma(K) \setminus \{0\}$. $\square$

Ende Di 29.05.18

Beispiel: Sei $X = C[0,1]$ und definiere $V \in \mathcal{L}(X)$ durch $Vf(t) := \int_0^t f(s)\,ds$. Dann ist $V : X \to X$ kompakt, aber $\sigma_p(V) = \emptyset$, da aus $\lambda f = Vf$ folgt $f(0) = 0$ und $\lambda f' = f$, also $f = 0$. Nach 3.6 ist also $\sigma(V) = \{0\}$.

Mittels $(V^n f)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)\,ds$ kann man $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$ zeigen, woraus ebenfalls $r(V) = 0$ für den Spektralradius von V folgt.

Wir werden das 3.9 entsprechende Ergebnis auch für unbeschränkte Operatoren erhalten, und zwar über Resolventen.

3.10. Lemma: Sei A ein abgeschlossener Operator in X mit nichtleerer Resolventenmenge. Dann sind äquivalent:

(i) $I : [D(A)] \to X$ ist kompakt,

(ii) es gibt $\lambda_0 \in \rho(A)$ so, dass $R(\lambda_0, A) \in \mathcal{K}(X)$,

(iii) $R(\lambda, A) \in \mathcal{K}(X)$ für alle $\lambda \in \rho(A)$.

In diesem Falle sagen wir, dass A *kompakte Resolventen hat.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wir wählen $\lambda_0 \in \rho(A)$ und faktorisieren $R(\lambda_0, A) = R(\lambda_0, A) \circ I$, wobei $R(\lambda_0, A) \in \mathcal{L}(X, [D(A)])$ und $I \in \mathcal{K}([D(A)], X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Verwende die Resolventengleichung.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wähle $\lambda_0 \in \rho(A)$ und faktorisiere $I = R(\lambda_0, A)(\lambda_0 - A)$, wobei $\lambda_0 - A \in \mathcal{L}([D(A)], X)$ und $R(\lambda_0, A) \in \mathcal{K}(X)$. $\square$

3.11. Lemma: Sei A ein abgeschlossener Operator in X, $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\}$. Dann gilt

$$N(z - A) = N((\lambda_0 - z)^{-1} - R(\lambda_0, A)), \quad R(z - A) = R((\lambda_0 - z)^{-1} - R(\lambda_0, A)),$$

Insbesondere ist $z - A \in \Phi([D(A)], X)$ genau dann, wenn $(\lambda_0 - z)^{-1} - R(\lambda_0, A) \in \Phi(X)$. In diesem Falle hat man $\operatorname{ind}(z - A) = \operatorname{ind}((\lambda_0 - z)^{-1} - R(\lambda_0, A))$.

Beweis. ist eine Übungsaufgabe. $\square$

Die Kombination von 3.9, 3.10, und 3.11 ergibt die folgende Version von Theorem 3.9 für unbeschränkte Operatoren.

3.12. Theorem: Sei A ein abgeschlossener linearer Operator in X mit $\rho(A) \neq \emptyset$ und kompakten Resolventen, sowie $z \in \sigma(A)$. Setze für $k \in \mathbb{N}$: $N_k := N((z-A)^k)$ und $R_k := R((z-A)^k)$. Dann gilt

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind N_k und R_k abgeschlossen und $\dim N_k = \operatorname{codim} R_k < \infty$.

(b) Es gibt ein minimales $p \in \mathbb{N}$ mit $N_p = N_{p+1}$.

(c) $N_{p+k} = N_p$ und $R_{p+k} = R_p$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

(d) $X = N_p \oplus R_p$, $(z-A)N_p \subset N_p$, $((z-A)|_{N_p})^p = 0$ und $A|_{R_p}$ mit $D(A|_{R_p}) = D(A) \cap R_p$ ist ein abgeschlossener linearer Operator in R_p mit $z \in \rho(A|_{R_p})$.

Insbesondere gilt $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Außerdem ist $\sigma(A)$ endlich oder $\sigma(A) = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ wobei $|z_n| \to \infty$.

Beachte, dass für festes $\lambda_0 \in \rho(A)$ der Operator $(\lambda_0 - z)^{-1} - R(\lambda_0, A) : R_p \to R_p$ nach 3.11 und 3.9 ein Isomorphismus ist und dass $R(\lambda_0, A)(R_p) = R_p \cap D(A) = D(A|_{R_p})$.

Beispiel: Sei $X = \{f \in C[0,1] : f(0) = f(1)\}$ und $A = \frac{d}{dx}$ mit $D(A) = \{f \in X \cap C^1[0,1] : f' \in X\}$. Der Oerator A hat kompakte Resolventen und $\sigma(A) = \sigma_p(A) = 2\pi i\mathbb{Z}$. Für $z \in \sigma(A)$ gilt $\alpha(z-A) = 1 = \beta(z-A)$.

Fredholmoperatoren als Verallgemeinerung von Isomorphismen zu betrachten führt zum folgenden Begriff.

3.13. Definition: Sei A ein abgeschlossener linearer Operator in X. Wir definieren das *wesentliche Spektrum* von A durch

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \notin \Phi([D(A)], X)\}.$$

Offensichtlich gilt $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \subseteq \sigma(A)$.

Beispiel: Gilt $\dim X < \infty$, so ist $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \emptyset$ für jedes $A \in \mathcal{L}(X)$. Ist $K \in \mathcal{K}(X)$ und $\dim X = \infty$, so gilt $\sigma_{\mathrm{ess}}(K) = \{0\}$ ($R(K)$ ist entweder endlichdimensional oder nicht abgeschlossen). Ist A ein abgeschlossener Operator in X mit nichtleerer Resolventenmenge und kompakten Resolventen, so gilt $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \emptyset$.

Bemerkungen: (a) Es gilt $\sigma_c(A) \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$.

(b) Nach 3.5 ist $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ abgeschlossen, $\mathbb{C} \backslash \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ ist offen, und die Abbildung $\mathbb{C} \backslash \sigma_{\mathrm{ess}}(A) \to \mathbb{Z}$, $\lambda \mapsto \operatorname{ind}(\lambda - A)$ ist stetig.

(c) Nach 3.11 gilt: Für $\lambda_0 \in \rho(A)$ ist

$$\sigma_{\text{ess}}(R(\lambda_0, A)) = \Big\{ \frac{1}{\lambda_0 - z} - R(\lambda_0, A) : z \in \sigma_{\text{ess}}(A) \Big\}.$$

Wir geben zwei Beispiele.

Beispiel: (a) Sei $X = l^2$ und L der Linksshift $L(x_n) = (x_{n+1})$. Wir wissen $\sigma(L) = \{|\lambda| \leq 1\}$ und $\sigma_p(L) = \{|\lambda| < 1\}$ mit $\alpha(\lambda - L) = 1$ für $|\lambda| < 1$. Setzen wir $X_0 := \{(x_n) \in l^2 : x_1 = 0\}$, so ist $L : X_0 \to X$ bijektiv und sogar isometrisch mit $(L|_{X_0})^{-1} = R : X \to X_0$, dh $LR = I_X$. Für $|\lambda| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k R^{k+1}$ absolut in Operatornorm und es gilt

$$(\lambda - L)\Big(-\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k R^{k+1} \Big) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} R^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k R^k = I_X.$$

Somit ist $R(\lambda - L) = X$ und $\beta(\lambda - L) = 0$, $\lambda - L \in \Phi(X)$ und $\operatorname{ind}(\lambda - L) = 1$ für jedes $|\lambda| < 1$. Aus der Stetigkeit ddes Index folgt dann $\sigma_{\text{ess}}(L) = \{|\lambda| = 1\}$.

(b) Sei $X = \{f \in C[0, \infty) \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, und $A = \frac{d}{dx}$, $D(A) = \{f \in X \cap C^1[0, \infty) : f' \in X\}$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in D(A)$ haben wir $(\lambda - A)f = 0$ genau dann, wenn $f' = \lambda f$, dh $f = ce^{\lambda(\cdot)}$. Somimt ist $\sigma_p(A) = \{\operatorname{Re}\lambda < 0\}$.

Für $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und $g \in X$ ist die eindeutige Lösung $f \in D(A)$ von $(\lambda - A)f = g$ gegeben durch

$$f(x) = ce^{\lambda x} - e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda t} g(t)\, dt,$$

wobei $c = c(g)$ so gewählt werden muss, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gilt, dh

$$c(g) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} g(t)\, dt.$$

Es folgt

$$(\lambda - A)^{-1} f(x) = \int_x^{\infty} e^{\lambda(x-t)} g(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g(x+s)\, ds.$$

Wir erhalten also $\{\operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$. Für $\operatorname{Re}\lambda < 0$ und $g \in X$ ist die eindeutige Lösung von $(\lambda - A)f = g$, $f(0) = 0$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-t)} g(t)\, dt.$$

Beachte $f \in D(A)$, woraus dann folgen $R(\lambda - A) = X$, $\beta(\lambda - A) = 0$, $\lambda - A \in \Phi(X)$ und $\operatorname{ind}(\lambda - A) = 1$ für jedes $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Mit demselben Argument wie in (a) erhalten wir nun $\sigma_{\text{ess}}(A) = \{\operatorname{Re}\lambda = 0\}$.

3.14. Lemma: Sei $T \in \Phi(X,Y)$. Dann gilt $T' \in \Phi(Y',X')$ und

$$\alpha(T') = \beta(T), \quad \beta(T') = \alpha(T), \quad \operatorname{ind} T' = -\operatorname{ind} T.$$

Beweis. ist eine Übungsaufgabe. $\square$

Aus diesem Lemma erhalten wir mittiels *spectral mapping*:

3.15. Korollar: Sei A ein abgeschlossener und dicht definierter linearer Operator in X mit $\rho(A) \neq \emptyset$. Dann gilt $\sigma_{\text{ess}}(A') = \sigma_{\text{ess}}(A)$ und für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(A)$:

$$\alpha(z - A') = \beta(z - A), \quad \beta(z - A') = \alpha(z - A), \quad \operatorname{ind}(z - A') = -\operatorname{ind}(z - A).$$

3.16. Satz: Sei A ein abgeschlossener Operator in X und $K \in \mathcal{K}([D(A)], X)$. Dann sind die Banachräume $[D(A)]$ und $[D(A+K)]$ isomorph und es gilt

$$\sigma_{\text{ess}}(A + K) = \sigma_{\text{ess}}(A).$$

Beweis. Der erste Teil ist eine Übung, und der Beweis der zweiten Aussage verwendet 3.8. $\square$

Wir geben ein typisches Beispiel.

Beispiel: Sei $X = \{f \in C[0,\infty) : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ mit Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, und $A = \frac{d}{dx}$, $D(A) = \{f \in X \cap C^1[0,\infty) : f' \in X\}$. Wir wissen $\sigma_{\text{ess}}(A) = i\mathbb{R}$.

Sei $m \in C[0,\infty)$ mit $m(t) = 0$ für $t \geq a$, wobei $a > 0$. Dann ist $f \mapsto mf$ kompakt von $[D(A)]$ nach X. Wenn wir also $Bf := f' + mf$ für $f \in D(B) := D(A)$ setzen, dann ist $\sigma_{\text{ess}}(B) = i\mathbb{R}$.

Durch ein Approximationsargument erhält man dasselbe für $m \in X$.

Für das folgende Beispiel verwenden wir die Fouriertransformation.

Für $s \geq 0$ definieren wir die *Besselpotentialräume* $H^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ durch

$$H^{s,2}(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F} f(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{H^{s,2}} := \|\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F} f(\xi)\|_{L^2} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\mathscr{F} f(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{1/2}.$$

Offensichtlich gilt $H^{0,2}(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$, und $H^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ ist ein Hilbertraum bzgl. des Skalarprodukts

$$(f|g)_{H^{s,2}} = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \mathscr{F} f(\xi) \overline{\mathscr{F} g(\xi)} \, d\xi.$$

Beispiel: In $X = L^2(\mathbb{R}^d)$ betrachten wir den Operator $A = -\Delta$, definiert auf $D(A) = H^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ durch

$$-\Delta f := \mathscr{F}^{-1}(\xi \mapsto 4\pi^2|\xi|^2\mathscr{F}f(\xi)).$$

Es gilt $\|f\|_{L^2}^2 + \|\Delta f\|_{L^2} \sim \|f\|_{H^{2,2}}^2$, dh die Graphennorm ist äquivalent zu $\|\cdot\|_{H^{2,2}}$, und A ist abgeschlossen.

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ gilt $\lambda \in \rho(A)$ und

$$R(\lambda, A)f = (\lambda + \Delta)^{-1}f = \mathscr{F}^{-1}(\xi \mapsto \underbrace{(\lambda - 4\pi^2|\xi|^2)^{-1}}_{\in L^\infty}\mathscr{F}f(\xi)), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Für $\lambda \geq 0$ gilt $N(\lambda - A) = \{0\}$ und $R(\lambda - A) = \mathscr{F}^{-1}((\lambda - 4\pi^2|\cdot|^2)H^{2,2})$, was dicht ist in L^2 (denn es enthält die dichte Teilmenge

$$\mathscr{F}^{-1}(\{f \in L^2 : \exists \varepsilon > 0 : f(x) = 0 \text{ if } |x| \geq \tfrac{1}{\varepsilon} \text{ or } ||x| - \tfrac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}| < \varepsilon\})),$$

aber nicht abgeschlossen in L^2 (denn $(\lambda - A)^{-1}$ ist unbeschränkt). Somit gilt $\sigma(A) = \sigma_{\text{ess}}(A) = [0,\infty)$.

3.17. Satz: Für $s > d/2$ und $\gamma \in (0, s - d/2) \cap (0,1)$ ist der Raum $H^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ stetig eingebettet in den Raum

$$C^\gamma(\mathbb{R}^d) = \{f \in C(\mathbb{R}^d) : \|f\|_\infty < \infty, \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty\},$$

Hölder-stetiger Funktionen.

Bemerkung: Der Raum $C^\delta(\mathbb{R}^d)$ ist ein Banachraum bzgl. der Norm

$$\|f\|_{C^\delta} := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\delta},$$

if $\delta \in (0,1]$.

Beweis. Für $f \in H^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ schreiben wir

$$\mathscr{F}f(\xi) = \underbrace{(1 + |\xi|^2)^{-s/2}}_{\in L^2}\underbrace{(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}f(\xi)}_{\in L^2} \in L^1,$$

woraus mittels Fourierinversion $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ folgt und

$$\|f\|_\infty \leq C_1\|f\|_{H^{s,2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Außerdem gilt sogar $|\xi|^\gamma \mathscr{F}f(\xi) \in L^1$ und

$$\|\xi \mapsto |\xi|^\gamma \mathscr{F}f(\xi)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_2\|f\|_{H^{s,2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Nun schreiben wir

$$f(x) - f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{2\pi i x\cdot\xi} - e^{2\pi i y\cdot\xi}) \mathscr{F}(\xi)\, d\xi$$

und erhalten wegen

$$|e^{2\pi i x\cdot\xi} - e^{2\pi i y\cdot\xi}| \le \min\{2, c|x-y||\xi|\} \le C|x-y|^\gamma |\xi|^\gamma,$$

dass gilt

$$|f(x) - f(y)| \le C'|x-y|^\gamma \underbrace{\||\cdot|^\gamma \mathscr{F} f\|_{L^1}}_{\le C_2 \|f\|_{H^{s,2}}}.$$

Die stetige Einbettung $H^{s,2}(\mathbb{R}^d) \subseteq C^\gamma(\mathbb{R}^d)$ für $\gamma \in (0, \min\{1, s - d/2\})$ ist damit bewiesen.

$\square$

Insbesondere gilt für $d = 3$ und $\gamma \in (0, 1/2)$: $H^{2,2}(\mathbb{R}^3) \subseteq C^\gamma(\mathbb{R}^3)$.

Ist $m \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $m(x) = 0$ für $|x| \ge a$ und irgendein $a > 0$, so ist die Abbildung $f \mapsto mf$ kompakt $H^{2,2}(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$, da wir sie über die kompakte Einschränkungsabbildung $C^\gamma(\mathbb{R}^3) \to C(\overline{B(0,a)})$ faktorisieren können, wobei $\gamma \in (0, 1/2)$: Die Abbildung $H^{2,2}(\mathbb{R}^3) \to C^\gamma(\mathbb{R}^3)$, $f \mapsto f$, ist beschränkt, die Einschränkung $C^\gamma(\mathbb{R}^3) \to C(\overline{B(0,a)})$, $f \mapsto f|_{\overline{B(0,a)}}$, ist kompakt (nach Arzelá-Ascoli), und die Abbildung $g \mapsto (m \cdot g)_0$, wobei h_0 die Fortsetzung von h durch 0 außerhalb von $\overline{B(0,a)}$ bezeichnet, ist beschränkt $C(\overline{B(0,a)}) \to L^2(\mathbb{R}^3)$.

Nach 3.16 gilt somit $\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta + m) = \sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta) = [0, \infty)$. Ende Do 07.06.18

4 Operatoren in Hilberträumen

Wenn nicht anderes gesagt wird, bezeichnet H einen komplexen Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$.

Wir erinnern an die folgenden Eigenschaften eines Skalarproduktes:

- $(\cdot|\cdot)$ ist linear in der ersten Komponente,
- $(y|x) = \overline{(x|y)}$ für alle $x, y \in H$,
- aus diesen beiden Eigenschaften folgt, dass $(\cdot|\cdot)$ *antilinear* in der zweiten Komponente, dh $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$ für alle $x, y, z \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
- für alle $x \in H$ gilt: $(x|x) \geq 0$ und $(x|x) = 0 \iff x = 0$.

aus deisen Eigenschaften folgt, dass $x \mapsto \|x\| := \sqrt{(x|x)}$ eine Norm auf H definiert und dass die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$$

für alle $x, y \in H$ gilt.

Ein Raum H mit einem solchen Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ heißt *Hilbertraum* , wenn er vollständig ist bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Norm $\|\dot{\|}$.

Sei $H' := \mathcal{L}(H, \mathbb{C})$ der Dualraum von H. Dann ist die Abbildung

$$J_H : H \mapsto H', \quad y \mapsto (\cdot|y)$$

ist bijektiv, isometrisch und antilinear.

4.1. Definition: Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Der *adjungierte Operator* $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ von T ist definiert durch

$$(x|T^*y)_{H_1} = (Tx|y)_{H_2} \quad \text{für alle } x \in H_1,\, y \in H_2,$$

dh $T^* = J_{H_1}^{-1} T' J_{H_2}$, wobei $T' \in \mathcal{L}(H_2', H_1')$ den dualen Operator von T bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}.$$

Genauso definieren wir den adjungierten Operator A^* als Operator von H_2 nach H_1 für einen dicht definierten Operator $A : H_1 \supseteq D(A) \to H_2$.

Ein Operator $S \in \mathcal{L}(H)$ heißt *selbstadjungiert*, falls $S^* = S$, *normal*, falls $SS^* = S^*S$, und *unitär*, falls $SS^* = S^*S = I$.

Rechenregeln: $(T^*)^* = T$, $(S+T)^* = S^* + T^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$, $(ST)^* = T^* S^*$.

Bemerkung: Für $S \in \mathcal{L}(H)$ gilt

$$\begin{aligned} S \text{ selbstadjungiert} &\iff \forall x, y \in H : (Sx|y) = (x|Sy) \\ S \text{ normal} &\iff \forall x, y \in H : (Sx|Sy) = (S^*x|S^*y) \\ S \text{ unitär} &\iff S \text{ ist bijektiv und isometrisch.} \end{aligned}$$

4.2. Lemma: Sei $S \in \mathcal{L}(H)$.

(a) $\|S^*S\| = \|SS^*\| = \|S\|^2$ und S^*S, SS^* sind selbstadjungiert.

(b) Ist S normal, so gilt

$$\|S\| = r(S) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(S)\}.$$

Beweis. (a) Wir haben

$$\|Sx\|^2 = |(Sx|Sx)| = |(x|S^*Sx)| \leq \|x\| \|S^*Sx\|,$$

also

$$\|S\|^2 \leq \|S^*S\| \leq \|S^*\| \|S\| = \|S\|^2.$$

(b) Wir berechnen $r(S)$. Wir verwenden wiederholt (a) und Normalität von S und erhalten

$$\|S^2\|^2 = \|S^2(S^2)^*\| = \|(SS^*)^2\| = \|(SS^*)(SS^*)^*\| = \|SS^*\|^2 = \|S\|^4.$$

Somit gilt $\|S^2\| = \|S\|^2$. Durch Iteration erhalten wir $\|S^{2^k}\| = \|S\|^{2^k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, woraus $r(S) = \|S\|$ folgt. $\square$

4.3. Definition und Lemma: Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ und

$$W(T) := \{(Tx|x) : \|x\| = 1\}$$

der *numerische Wertebereich* von T. Dann gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.

Beweis. Sei $\lambda \notin \overline{W(T)}$. Dann ist $d := d(\lambda, \overline{W(T)}) > 0$ und für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$:

$$d \leq |\lambda - (Tx|x)| = |((\lambda - T)x|x)| \leq \|(\lambda - T)x\| \cdot \|x\| = \|(\lambda - T)x\|.$$

Somit ist $\lambda - T$ injektiv, $(\lambda - T)^{-1} : R(\lambda - T) \to H$ ist beschränkt und $R(\lambda - T)$ ist abgeschlossen. Nun ist $R(\lambda - T)$ dicht genau dann, wenn $(\lambda - T)^* = \overline{\lambda} - T^*$ injektiv ist. Wegen $W(T^*) = \{\overline{\mu} : \mu \in W(T)\}$ gilt $d(\overline{\lambda}, \overline{W(T^*)}) = d(\lambda, W(T)) = d > 0$ und das Argument von eben zeigt, dass $\overline{\lambda} - T^*$ injektiv ist. $\square$

4.4. Folgerung: Ist $S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, so ist $W(S) \subset \mathbb{R}$ und

$$\sigma(S) \subseteq [m, M] \subseteq [-\|S\|, \|S\|],$$

wobei $m := \inf\{(Sx|x) : \|x\| = 1\}$ und $M := \sup\{(Sx|x) : \|x\| = 1\}$.

Beweis. Für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ gilt

$$(Sx|x) = (x|Sx) = \overline{(Sx|x)},$$

dh $(Sx|x) \in \mathbb{R}$, und

$$|(Sx|x)| \leq \|Sx\|\|x\| \leq \|S\|.$$

Der Rest folgt aus 4.3. □

Der folgende Satz ist ein erster Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren. Man erhält einen *Funktionalkalkül* für Funktionen, die stetig auf dem Spektrum sind. Wir schreiben $p_j(\lambda) = \lambda^j$ für $j \in \mathbb{N}_0$, so dass $p_0 = 1_{\sigma(S)}$ und $p_1 = \mathrm{id}_{\sigma(S)}$.

4.5. Satz (Funktionalkalkül für stetige Funktionen): Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildung $\Phi : C(\sigma(S)) \to \mathcal{L}(H)$ so, dass

$$\Phi(p_0) = I, \quad \Phi(p_1) = S, \quad \Phi(f \cdot g) = \Phi(f)\Phi(g), \quad f, g \in C(\sigma(S)),$$

[Φ ist multiplikativ, dh ein *Algebrahomomorphismus*.]

Für jedes $f \in C(\sigma(S))$ ist der Operator $\Phi(f)$ normal,

$$\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f}),$$

und $\Phi(f)$ ist selbstadjungiert genau dann, wenn f reell-wertig ist.

Außerdem ist Φ eine Isometrie, dh $\|\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\infty,\sigma(S)}$ für alle $f \in C(\sigma(S))$.

Beweis. Für Polynome $p(\lambda) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j$ setzen wir $\Phi(p) := \sum_{j=0}^n a_j S^j$.Sei $\mathcal{P}$ die Algebra aller Polynomfunktionen $p : \sigma(S) \to \mathbb{C}$. Dann ist $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(H)$ ein Algebrenhomomorphismus, es gilt $\Phi(p)^* = \Phi(\overline{p})$ und $\Phi(p)$ ist normal for jedes $p \in \mathcal{P}$. Außerdem ist $\Phi(p)$ selbstadjungiert wenn p reellwertig ist. Zudem gilt $\Phi(p_0) = I$ und $\Phi(p_1) = S$.

Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz ist $\mathcal{P}$ dicht in $C(\sigma(S))$ bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Somt müssen wir nur überprüfen, dass $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{L}(H)$ isometrisch ist. Für $p \in \mathcal{P}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi(p)\|^2 &= \|\Phi(p)^*\Phi(p)\| = \|\Phi(\overline{p})\Phi(p)\| = \|\Phi(\overline{p}p)\| = r(\Phi(\overline{p}p)) \\ &= \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\Phi(\overline{p}p))\} = \max\{|\overline{p}p(\mu)| : \mu \in \sigma(S)\} = \|p\|^2_{\infty,\sigma(S)}, \end{aligned}$$

wobei *spectral mapping* für Polynome in S benutzt wird. Wenn $\Phi(p)$ selbstadjungiert ist, erhalten wir $\Phi(\overline{p}) = \Phi(p)^* = \Phi(p)$, woraus $\overline{p} = p$, dh Reellwertigkeit von p, folgt, da Φ ja injektiv ist.

Die gezeigten Eigenschaften von Φ bleiben unter der Approximation stetiger Funktionen durch Polynome erhalten. □

Eine erste Anwendung ist

4.6. Lemma: Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und seien m, M wie in Folgerung 4.4. Dann gilt $m, M \in \sigma(S)$.

Beweis. Wir beweisen die Assauge für m und können $m = 0$ annehmen (ansonsten betrachten wir $S - m$ statt S). Wir finden eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $(Sx_n|x_n) \to 0+$. Nach 4.4 gilt $\sigma(S) \subseteq [0, M]$. Die Funktion $q(t) := \sqrt{t}$ gehört somit zu $C(\sigma(S))$, und wir setzen $\sqrt{S} := \Phi(q) \in \mathcal{L}(H)$, wobei Φ den Funktionalkalkül aus Satz 4.5 bezeichnet. Dann ist $\sqrt{S}$ selbstadjungiert, $(\sqrt{S})^2 = S$ und somit

$$\|\sqrt{S}x_n\|^2 = (\sqrt{S}x_n|\sqrt{S}x_n) = (Sx_n|x_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Wegen $\sqrt{S} \in \mathcal{L}(H)$ folgt daraus

$$Sx_n = \sqrt{S}(\sqrt{S}x_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Das bedeutet aber $0 \in \sigma_{ap}(S)$. □

Ende Di 12.06.18

Als weitere Anwendung zeigen wir die "Optimalität" von selbstadjungierten Operatoren bzgl. Abschätzungen für die Resolventennorm (die Ungleichung "$\geq$" gilt für jeden Operator).

4.7. Folgerung: Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt für jedes $\lambda \in \rho(S)$,

$$R(\lambda, S) = \Phi((\lambda - (\cdot))^{-1}) \quad \text{and} \quad \|R(\lambda, S)\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(S))}.$$

Beweis. Es gilt

$$(\lambda - S)\Phi((\lambda - (\cdot))^{-1}) = \Phi(\lambda - (\cdot))\Phi((\lambda - (\cdot))^{-1}) = \Phi(1_{\sigma(S)}) = I,$$

und $\Phi((\lambda - (\cdot))^{-1})(\lambda - S) = I$ beweist man ähnlich. Beachte dann, dass Φ isometrisch ist und dass gilt $\|(\lambda - (\cdot))^{-1}\|_{\infty,\sigma(S)} = d(\lambda, \sigma(S))^{-1}$. □

4.8. Definition: Ein selbstadjungierter Operator $S \in \mathcal{L}(H)$ heißt *positiv*, geschrieben $S \geq 0$, falls $(Sx|x) \geq 0$ für alle $x \in H$ gilt. Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ ein weiterer selbstadjungierter Operator, so schreiben wir $S \geq T$, falls $S - T \geq 0$, dh also falls $(Sx|x) \geq (Tx|x)$ für alle $x \in H$.

4.9. Lemma: Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $\Phi : C(\sigma(S)) \to \mathcal{L}(H)$ der Funktionalkalkül für S aus 4.5. Sind $f, g \in C(\sigma(S))$ reellwertig und $f \geq g$, dann gilt $\Phi(f) \geq \Phi(g)$ im Sinne von 4.8.

Beweis. Es reicht, den Falle $g = 0$, dh $f \geq 0$ zu betrachten. Dann ist $\sqrt{f}$ wohldefiniert, $\sqrt{f} \in C(\sigma(S))$, und $\Phi(f) = \Phi(\sqrt{f}\sqrt{f}) = \Phi(\sqrt{f})\Phi(\sqrt{f})$, wobei $\Phi(\sqrt{f})$ selbstadjungiert ist. Daraus folgt für jedes $x \in H$:

$$(\Phi(f)x|x) = (\Phi(\sqrt{f})\Phi(\sqrt{f})x|x) = (\Phi(\sqrt{f})x|\Phi(\sqrt{f})x) \geq 0.$$

$\square$

Wir untersuchen nun zunächst allgemeine selbstadjungierte Operatoren. Dazu erinnern wir an das folgende:l

- $x \perp y :\Longleftrightarrow (x|y) = 0$ für $x, y \in H$,
- $M \perp N :\Longleftrightarrow \forall x \in M, y \in N$: $(x|y) = 0$ für lineare Teilräume $M, N \subset H$,
- $M^\perp := \{x \in H : x \perp M\} = \{x \in H : \forall y \in M : x \perp y\}$ für einen linearen Teilraum M von H.

Ist M ein linearer Teilraum von H, so ist $M^\perp$ stets abgeschlossen, $\overline{M}^\perp = M^\perp$, und $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$. außerdem gilt immer $H = \overline{M} \oplus M^\perp$, wobei $\overline{M} \perp M^\perp$.

4.10. Lemma: Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt:

(a) Für alle $\lambda, \mu \in \sigma(S)$ mit $\lambda \neq \mu$: $N(\lambda - S) \perp N(\mu - S)$.

(b) Für jedes $\lambda \in \sigma(S)$: $N((\lambda - S)^2) = N(\lambda - S)$.

(c) Der Raum H ist die orthogonale direkte Summe von $N(S)$ und $\overline{R(S)}$, dh $H = N(S) \oplus \overline{R(S)}$ und $N(S) \perp \overline{R(S)}$.

Beweis. (a) Für $x \in N(\lambda - S)$ und $y \in N(\mu - S)$ gilt

$$\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (Sx|y) = (x|Sy) = \mu(x|y),$$

und $x \perp y$ wegen $\lambda \neq \mu$.

(b) Sei $x \in N((\lambda - S)^2)$. Dann gilt

$$\|(\lambda - S)x\|^2 = ((\lambda - S)x|(\lambda - S)x) = (x|\underbrace{(\lambda - S)^2 x}_{=0}) = 0,$$

dh $(\lambda - S)x = 0$, und $x \in N(\lambda - S)$. Die andere Inklusion ist klar.

(c) Sei $x \in N(S)$ und $Sy \in R(S)$. Dann gilt $(x|Sy) = (Sx|y) = 0$, also ist $N(S) \perp \overline{R(S)}$. Ist andererseits $x \in H$ mit $x \perp \overline{R(S)}$, so gilt

$$\|Sx\|^2 = (Sx|Sx) = (x|\underbrace{S^2 x}_{\in R(S)}) = 0,$$

dh $Sx = 0$ und $x \in N(S)$. Somit ist $N(S) = \overline{R(S)}^{\perp}$. □

4.11. Theorem: Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und selbstadjungiert und $\dim H = \infty$. Dann existiert eine reelle Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\lambda_n \to 0$ und eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in H so, dass

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (\cdot|e_n)e_n,$$

wobei die Reihe in Operatornorm konvergiert.

Beachte, dass die λ_n gerade die Eigenwerte von S sind.

Beweis. Wir wenden Satz 3.9 auf S an. Nach 4.10(b) ist $p = 1$ für jedes $\lambda \in \sigma(S) \setminus \{0\}$. Außerdem besteht $\sigma(S)$ aus einer Nullfolge. Für jedes $\lambda \in \sigma(S)\setminus\{0\}$ finden wir eine endliche Orthonormalbasis von $N(\lambda - S)$. Wir erhalten so eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in N}$, wobei wir annehmen, dass die zugehörigen Eigenwerte so geordnet sind, dass $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. Hier ist $N = \{0, \ldots, n_0\}$ endlich (wenn $\sigma(S) \setminus \{0\}$ endich ist) oder $N = \mathbb{N}_0$.

Wir setzen $P := \sum_{n\in N}(\cdot|e_n)e_n$. Dann ist P die Orthogonalprojektion auf $H_1 := \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in N\}}$. Wir setzen $H_0 := H_1^{\perp}$ und haben dann für $x \in H_0$ und $n \in N$:

$$(Sx|e_n) = (x|Se_n) = \lambda_n(x|e_n) = 0.$$

dh $Sx \in H_0$. Also gilt $S_0 := S|_{H_0} \in \mathcal{L}(H_0)$. Offensichtlich ist S_0 selbstadjungiert und kompakt. Nach 3.9 ist $\sigma(S_0) \setminus \{0\} = \emptyset$, also $S_0 = 0$ nach 4.2(b), und $H_0 \subseteq N(S)$. Andererseits ist $N(S)$ nach 4.10(a) orthogonal zu jedem $N(\lambda_n - S)$, $n \in N$. Folglich gilt $N(S) \subseteq H_0$, und wir erhalten $H_0 = N(S)$. Nach 4.10(c) ist also $H_1 = \overline{R(S)}$. Dann ist aber auch

$$Sx = SPx = \sum_{n\in N} \lambda_n(x|e_n)e_n \quad \text{für alle } x \in H.$$

Falls $N = \{0, \ldots, n_0\}$ endlich ist, setzen wir $\lambda_n = 0$ für $n > n_0$ und wählen eine orthonormale Folge $(e_n)_{n>n_0}$ in $N(S)$.

Für $x \in H$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt wegen Pythagoras und der Besselschen Ungleichung

$$\|Sx - \sum_{n=0}^{k} \lambda_n (x|e_n) e_n\|^2 = \sum_{n>k} |\lambda_n (x|e_n)|^2 \leq \|x\|^2 (\sup_{n>k} |\lambda_n|)^2,$$

was Konvergenz der Reihe in Operatornorm zeigt, da ja (λ_n) eine Nullfolge ist. □

4.12. Theorem: Sei G ein weiterer Hilbertraum mit $\dim G = \infty$ und $T \in \mathcal{K}(H, G)$. Dann gibt es eine fallende Nullfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $[0, \infty)$ und orthonormale Folgen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in H und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in G so, dass

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (\cdot|e_n) f_n,$$

wobei die Reihe in Operatornorm konvergiert.

Beweis. Der Operator $T^*T \in \mathcal{L}(H)$ ist kompakt und selbstadjungiert und $T^*T \geq 0$ im Sinne von 4.8, also $\sigma(T^*T) \subseteq [0, \|T\|^2]$ nach 4.4. Nach 4.11 erhalten wir eine fallende Nullfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in H so, dass

$$T^*T = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2 (\cdot|e_n) e_n.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $s_n > 0$ setzen wir $f_n := s_n^{-1} T e_n$. Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $s_n s_m > 0$ gilt dann Ende Do 14.06.18

$$(f_n|f_m) = (s_n s_m)^{-1} (Te_n|Te_m) = (s_n s_m)^{-1} (T^*Te_n|e_m) = \frac{s_n^2}{s_n s_m} (e_n|e_m) = \delta_{nm}.$$

Wenn $N = \{s \in \mathbb{N}_0 : s_n > 0\}$ endlich ist, erweitern wir $(f_n)_{n\in N}$ z einer orthonormalen Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in G. Ist $y \perp e_n$ für alle $n \in N$, dann gilt

$$\|Ty\|^2 = (T^*Ty|y) = 0,$$

wie man an der Darstellung von T^*T sieht. Somit gilt für jedes $x \in H$

$$\begin{aligned} Tx &= T\Big(\underbrace{x - \sum_{n\in N} (x|e_n) e_n}_{\in N(T)}\Big) + T\Big(\sum_{n\in N} (x|e_n) e_n\Big) \\ &= \sum_{n\in N} (x|e_n) T e_n = \sum_{n\in N} s_n (x|e_n) f_n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x|e_n) f_n. \end{aligned}$$

Der Beweis für Konvergenz in Operatornorm ist wie in 4.11. □

4.13. Folgerung: Sei G ein weiterer Hilbertraum und

$$\mathcal{F}(H,G) := \{T \in \mathcal{L}(H,G) : \dim R(T) < \infty\}$$

der Raum der Operatoren *endlichen Ranges* von H nach G. Dann ist $\mathcal{F}(H,G)$ dicht in $\mathcal{K}(H,G)$ bzgl. der Operatornorm.

Bemerkung: Diese Resultat ist in allgemeinen Banachräumen falsch (nach einem Gegenbeispiel von Enflo 1973). The *Rang* eines Operators ist die Dimension seines Bildes (wie für Matrizen).

4.14. Definition und Bemerkung: Eine Darstellung von $T \in \mathcal{K}(H,G)$ als Reihe mit den Eigenschaften aus 4.12 heißt eine *Schmidt-Darstellung* von T. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist durch T eindeutig bestimmt (als Wurzeln der fallende Eigenwertfolge von T^*T), im allgemeinen aber nicht die orthonormalen Folgen (e_n) und (f_n). Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt die Folge von *singulären Zahlen* des Operators T und wird mit $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnet. Das folgende charakterisiert die singulären Zahlen eines Operators als *Approximationszahlen*:

Für $T \in \mathcal{K}(H,G)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$s_n(T) = \inf\{\|T-U\| : U \in \mathcal{L}(H,G), \dim R(U) \leq n\} =: \alpha_n(T).$$

Die Zahl $\alpha_n(T)$ misst, wie gut sich T durch Operatoren vom Rang $\leq n$ appoximieren lässt.

Beweis. Sei $\sum_{j=0}^{\infty} s_j(\cdot|e_j)f_j$ eine Schmidt-Darstellung von T. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in H$ nach der Besselschen Ungleichung

$$\|Tx - \sum_{j=0}^{n-1} s_j(x|e_j)f_j\|^2 \leq \sum_{j=n}^{\infty} s_j^2|(x|e_j)|^2 \leq s_n^2\|x\|^2.$$

Daraus folgt $\alpha_n(T) \leq s_n$.

Nun sei $U \in \mathcal{L}(H,G)$ mit $\dim R(U) \leq n$. Die Einschränkung von U auf den $(n+1)$-dimensionalen Teilraum $\operatorname{span}\{e_0,\dots,e_n\}$ hat nicht-trivialen Kern. Also finden wir $y = \sum_{j=0}^{n} \eta_j e_j$ mit $\|y\| = 1$ und $Uy = 0$. Nach Pythagoras erhalten wir also

$$\|T-U\|^2 \geq \|(T-U)y\|^2 = \|Ty\|^2 = \|\sum_{j=0}^{n} s_j\eta_j f_j\|^2 = \sum_{j=0}^{n} s_j^2|\eta_j|^2 \geq s_n^2 \sum_{j=0}^{n} |\eta|^2 = s_n^2.$$

Somit gilt $\alpha_n(T) \geq s_n$. $\square$

Bemerkung: Für $1 \leq p < \infty$ ist die *Schatten p-Klasse* definiert als

$$S_p(H,G) := \{T \in \mathcal{K}(H,G) : (s_n(T))_{n\in\mathbb{N}_0} \in l^p\}$$

und $\nu_p(T) := (\sum_{n=0}^{\infty} s_n(T)^p)^{1/p}$ für $T \in S_p(H,G)$. Elemente von $S_2(H,G)$ heißen *Hilbert-Schmidt-Opertoren* und Elemente von $S_1(H,G)$ heißen *nukleare Operatoren* oder, für $G = H$, Operatoren der *Spurklasse*.

In vielerlei Hinsichtmjede können die Räume $S_p(H,G)$ als "nicht-kommutative" Analoga der Räume l^p angesehen werden (siehe etwa §16 in Meise/Vogt "Einführung in die Funktionalanalysis").

Bemerkung: Sind H und G separable unendlich-dimensionale Hilberträume, so können die Folges $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in 4.11 und 4.12 als Orthonormalbasen von H bzw. G gewählt werden. Das ergibt sich aus dem Beweis.

Man beachte auch, dass für einen kompakten Operator $T \in \mathcal{K}(H,G)$ der Raum $\overline{R(T)}$ immer separabel ist. Für einen selbstadjungerten und injektiven Operator $T \in \mathcal{K}(H)$ ist außerdem der Raum H separable (denn dann ist H_0 im Beweis trivial).

5 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operators

Für einen selbstadjungierten Operator $S \in \mathcal{L}(H)$ wollen wir den Funktionalkalkül aus Satz 4.5 zu einem Funktionalkalkül für beschränkte Borel-messbare Funktionen auf $\sigma(S)$ fortsetzen.

5.1. Definition: Für eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir

$$\mathcal{B}_b(K) := \{ f : K \to \mathbb{C} : \ f \text{ ist Borel messbar und beschränkt} \},$$

versehen mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup_{t \in K} |f(t)|$ (beachte , dass $\mathcal{B}_b(K)$ ein Raum von Funktionen ist, nicht nur von Äquivalenzklassen!). Dann ist $\mathcal{B}_b(K)$ ein Banachraum.

Ist (f_n) eine Folge von Funktionen $M \to \mathbb{C}$ und $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so schreiben wir $f_n \to f$ *beschränkt punktweise*, falls $f_n \to f$ punktweise und $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$. Offensichtlich ist $\mathcal{B}_b(K)$ abgesclossen unter beschränkt punktweiser Konvergenz.

Wir nennen eine Abbildung $\Psi : \mathcal{B}_b(K) \to \mathcal{L}(H)$ σ-*continuous* , falls aus $f_n \to f$ beschränkt punktweise folgt $(\Psi(f_n)x|y) \to (\Psi(f)x|y)$ für alle $x, y \in H$.

5.2. Lemma: Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. $\mathcal{B}_b(K)$ ist die kleinste Teilmenge M von $\mathbb{C}^K$ mit den Eigenschaften

(1) $C(K) \subseteq M$,

(2) M ist abgeschlossen unter beschränkt punktweiser Konvergenz.

Beweis. Sei M_0 die kleinste Teilmenge M von $\mathbb{C}^K$ mit (1) und (2), dh der Durchschmitt aller Teilmengen M von $\mathbb{C}^K$ mit (1) und (2). Da $\mathcal{B}_b(K)$ den Eigenschaften (1) und (2) genügt, gilt $M_0 \subseteq \mathcal{B}_b(K)$.

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, genügt $\frac{1}{\lambda} M_0$ (1) und (2), so dass $M_0 \subseteq \frac{1}{\lambda} M_0$, dh $\lambda M_0 \subseteq M_0$.

Ist $f \in C(K)$, so genügt $M_0 - f$ den Eigenschaften (1) und (2), so dass $M_0 \subseteq M_0 - f$, dh $f + M_0 \subseteq M_0$. Somit gilt $C(K) + M_0 \subseteq M_0$. Sei $S := \{f : f + M_0 \subseteq M_0\}$. Wir haben gerade gezeigt, dass $C(K) \subseteq S$. Ist (f_n) eine Folge in S mit $f_n \to f$ beschränkt punktweise und ist $g \in M_0$, so ist $(f_n + g)$ eine Folge in M_0 (wegen $f_n \in S$) und $f_n + g \to f + g$ beschränkt punktweise. Nach (2) für M_0 haben wir $f + g \in M_0$. Da $g \in M_0$ beliebig war, gilt $f \in S$, und (2) ist für S nachgewiesen. Wir erhalten $M_0 \subseteq S$, dh $M_0 + M_0 \subseteq M_0$.

Somit haben wir gezeigt, dass M_0 ein komplexer Vektorraum ist. Außerdem genügt $M := \{g : |g| \in M_0\}$ den Eigenschaften (1) und (2), also gilt $M_0 \subseteq M$, dh $f \in M_0$ impliziert $|f| \in M_0$. Da M_0 ein Vektorraum ist, erhalten wir

$$\max\{f, g\}, \min\{f, g\} = \frac{1}{2}((f + g) \pm |f - g|) \in M_0$$

für reellwertige $f, g \in M_0$.

Nun setzen wir $\mathcal{F} := \{A \subseteq K : 1_A \in M_0\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra in K: $\emptyset, K \in \mathcal{F}$ ist klar wegen $0, 1_K \in C(K) \subseteq M_0$. Ist $A \in \mathcal{F}$, so folgt $K \setminus A \in \mathcal{F}$, da M_0 ein Vektorraum ist. Ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$, so ist $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{F}$, da das Maximum einer endlichen Familie von Funktionen in M_0 wieder zu M_0 gehört. Schließlich folgt $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$ aus (2) für M_0.

Ebenfalls nach (2) enthält $\mathcal{F}$ alle Mengen $(-\infty, b] \cap K$, $b \in \mathbb{R}$, somit alle Borelmengen von K. Da jedes $f \in \mathcal{B}_b(K)$ gleichmäßig auf K durch eine Folge (f_n) von einfachen Borelfunktionen approximiert werden kann, erhalten wir $\mathcal{B}_b(K) \subseteq M_0$. $\square$

Ende Di 19.06.18

5.3. Lemma: Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Sind $\Phi, \Psi : \mathcal{B}_b(K) \to \mathcal{L}(H)$ σ-stetig und stimmen auf $C(K)$ überein, dann gilt $\Phi = \Psi$.

Beweis. Sei

$$M := \{f \in \mathcal{B}_b(K) : \Phi(f) = \Psi(f)\} = \{f \in \mathcal{B}_b(K) : \forall x, y \in H : (\Phi(f)x|y) = (\Psi(f)x|y)\}.$$

Dann genügt M den Eigenschaften (1) und (2) aus 5.2, also ist $M = \mathcal{B}_b(K)$, dh $\Phi = \Psi$. $\square$

Der folgende Satz, dessen Beweis wir für den Moment zurückstellen, ist essentiell für den Beweis des Spektralsatzes.

5.4. Satz: Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $\phi \in C(K)'$. Dann gibt es genau eine σ-stetige Fortsetzung $\widetilde{\phi} \in \mathcal{B}_b(K)'$ von ϕ. Es gilt $\|\widetilde{\phi}\| = \|\phi\|$.

Auch das folgende Lemma über den Zusammenhang zwischen stetigen Sesquilinearformen und linearen Operatoren werden wir im Beweis des Spektralsatzes benutzen.

5.5. Lemma: Sei $\beta : H \times H \to \mathbb{C}$ *sesquilinear* (dh linear in der ersten und antilinear in der zweiten Komponente) und *stetig*, dh es gibt $M \geq 0$ mit

$$|\beta(x, y)| \leq M\|x\|\|y\| \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $B \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$\beta(x, y) = (Bx|y) \quad \text{für alle } x, y \in H,$$

und es gilt $\|B\| \leq M$.

Beweis. Für jedes $x \in H$ gilt $\overline{\beta(x, \cdot)} \in H'$. Wir definieren $Bx := J_H^{-1}(\overline{\beta(x, \cdot)})$. Dann ist B linear (da Komposition zweier antilinearer Abbildungen), und $\|Bx\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in H$, dh $B \in \mathcal{L}(H)$ und $\|B\| \leq M$. Für $x, y \in H$ gilt dann

$$(Bx|y) = \overline{(y|Bx)} = \overline{(J_H(Bx))(y)} = \overline{\overline{\beta(x, \cdot)}(y)} = \beta(x, y).$$

Eindeutigkeit von B ist klar. $\square$

Wir bringen nun den Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum.

5.6. Satz (Funktionalkalkül für beschränkte Borel-messbare Funktionen): Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte σ-stetige Fortsetzung $\Psi : \mathcal{B}_b(\sigma(S)) \to \mathcal{L}(H)$ des Funktionalkalküls $\Phi : C(\sigma(S)) \to \mathcal{L}(H)$ aus 4.5. Die Abbildung Ψ ist linear und multiplikativ, dh ein Algebrenhomomorphismus, mit $\|\Psi\| = \|\Phi\| = 1$. Außerdem gilt

(i) für jedes $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$ ist der Operator $\Psi(f)$ normal und $\Psi(\overline{f}) = \Psi(f)^*$,

(ii) für reellwertiges $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$ ist $\Psi(f)$ selbstadjungiert,

(iii) für $f \geq 0$ ist $\Psi(f) \geq 0$ im Sinne von 4.8.

Warnung: Wir haben $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$ für $f \in C(\sigma(S))$ und $\|\Psi(g)\| \leq \|g\|_\infty$ für alle $g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$, aber es kann vorkommen, dass $\|\Psi(g)\| < \|g\|_\infty$ für geeignete $g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$ gilt. Zum Beispiel gilt für $\lambda \in \sigma(S)$, dass $\Psi(1_{\{\lambda\}}) = 0$ genau dann, wenn $\lambda \notin \sigma_p(S)$.

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus 5.3. Zum Beweis der Existenz setzen wir für $x, y \in H$:

$$\phi_{x,y} : C(\sigma(K)) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \phi_{x,y}(f) := (\Phi(f)x|y).$$

Dann gilt $\phi_{x,y} \in C(\sigma(S))'$ und $\|\phi_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$. Außerdem ist die Abbildung $H \times H \mapsto C(\sigma(S))'$ sesquillinear.

Nach 5.4 finden wir für jedes Paar $(x, y) \in H \times H$ eine eindeutig bestimmte σ-stetige Fortsetzung $\widetilde{\phi}_{x,y} : \mathcal{B}_b(\sigma(S)) \to \mathbb{C}$ mit $\|\widetilde{\phi}_{x,y}\| = \|\phi_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$. Wir zeigen, dass $(x, y) \mapsto \widetilde{\phi}_{x,y}$ sesquilinear ist: Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x, y, z \in H$ stimmen die σ-stetigen Funktionale $\widetilde{\phi}_{\alpha x+y,z}$ und $\alpha\widetilde{\phi}_{x,z} + \widetilde{\phi}_{y,z}$ bzw. $\widetilde{\phi}_{x,\alpha y+z}$ und $\overline{\alpha}\widetilde{\phi}_{x,y} + \widetilde{\mu}_{x,z}$ auf $C(\sigma(S))$ überein. Nach 5.3 stimmen sie also jeweils auf $\mathcal{B}_b(\sigma(S))$ überein.

Für jedes $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$ definieren wir

$$\beta_f : H \times H \to \mathbb{C},\ (x, y) \mapsto \beta_f(x, y) := \widetilde{\phi}_{x,y}(f).$$

Dann gilt

$$|\beta_f(x, y)| = |\widetilde{\phi}_{x,y}(f)| \leq \|f\|_\infty\|x\|\|y\| \quad \text{für alle } x, y \in H,\ f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S)).$$

Außerdem ist jedes β_f sesquilinear. Nach 5.5 gibt es zu jedem $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$ einen eindeutig bestimmten Operator $\Psi(f) \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$\widetilde{\phi}_{x,y}(f) = \beta_f(x, y) = (\Psi(f)x|y) \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Es gilt $\|\Psi(f)\| \leq \|f\|_\infty$. Klar ist $\Psi(f) = \Phi(f)$ für $f \in C(\sigma(S))$. Nach Konstruktion ist $\Psi : f \mapsto \Psi(f)$ auf $\mathcal{B}_b(\sigma(S))$ σ-stetig.

Wir zeigen, dass $f \mapsto \Psi(f)$ linear ist: Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$ gilt

$$\begin{aligned} ((\alpha\Psi(f) + \Psi(g))x|y) &= \alpha(\Psi(f)x|y) + (\Psi(g)x|y) = \alpha\widetilde{\phi}_{x,y}(f) + \widetilde{\phi}_{x,y}(g) = \widetilde{\phi}_{x,y}(\alpha f + g) \\ &= (\Psi(\alpha f + g)x|y), \end{aligned}$$

für alle $x, y \in H$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in 5.5 folgt also $\alpha\Psi(f)+\Psi(g) = \Psi(\alpha f+g)$, dh $\Psi : f \mapsto \Psi(f)$ ist linear.

Für $f \in C(\sigma(S))$ ist $g \mapsto \Psi(fg) - \Psi(f)\Psi(g)$ σ-stetig und verschwindet auf $C(\sigma(S))$, nach 5.3 also auf $\mathcal{B}_b(\sigma(S))$. Wir erhalten $\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g)$ für alle $g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$. Für festes $g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$ verschwindet die σ-stetige Abbildung $f \mapsto \Psi(fg) - \Psi(f)\Psi(g)$ auf $C(\sigma(S))$, nach 5.3 also auf $\mathcal{B}_(\sigma(S))$. Wir erhalten $\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$, dh Ψ ist multiplikativ.

Wir zeigen (i). Da die Abbildung $f \mapsto \Psi(\overline{f}) - \Psi(f)^*$ σ-stetig auf $\mathcal{B}_b(\sigma(S))$ ist und auf $C(\sigma(S))$ verschwindet, verschwindet sie nach 5.3 auf $\mathcal{B}_b(K)$. Also gilt $\Psi(\overline{f}) = \Psi(f)^*$ für alle $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$. Für jedes $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$ gilt dann

$$\Psi(f)\Psi(f)^* = \Psi(f)\Psi(\overline{f}) = \Psi(|f|^2) = \Psi(\overline{f})\Psi(f) = \Psi(f)^*\Psi(f),$$

so dass $\Psi(f)$ normal ist.

Wir zeigen (ii). Für reellwertiges f gilt

$$\Psi(f)^* = \Psi(\overline{f}) = \Psi(f),$$

dh $\Psi(f)$ ist selbstadjungiert. Zum Nachweis von (iii) sei schließlich $f \geq 0$, dann ist $g := \sqrt{f} \in \mathcal{B}_b(\sigma(S))$ und für $x \in H$ gilt

$$(\Psi(f)x|x) = (\Psi(g^2)x|x) = (\Psi(g)\Psi(g)x|x) = (\Psi(g)x|\Psi(g)x) \geq 0,$$

wobei wir benutzt haben, dass $\Psi(g)$ selbstadjungiert ist. □

Wir müssen nun den Beweis von 5.4 nachholen. Dazu finden wir zunächst eine Darstellung des Dualraums von $C([a, b])$, wobei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-triviales kompaktes Intervall ist. Das folgende dient der Vorbereitung.

5.7. Funktionen von beschränkter Variation und Stieltjes-Integral: Wir nennen eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ von *beschränkter Variation* (auf $[a, b]$) und schreiben $g \in BV([a, b])$, falls

$$\|g\|_{BV} := \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n} |g(t_j) - g(t_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\Big\} < \infty.$$

Für $f \in C([a, b])$ und $g \in BV([a, b])$ definieren wir das *Stieltjes-Integral* von f bzgl. g durch

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \lim\Big[\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))\Big],$$

wobei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ für $j = 1, \ldots, n$, und der Limes für $\max |t_j - t_{j-1}| \to 0$ betrachtet wird (das Argument für die Existenz dieses Grenzwerts ist ähnlich zum Fall $g(t) = t$, welcher das Riemann-Integral gibt). Die Abschätzung

$$\Big| \int_a^b f(t)\, dg(t) \Big| \leq \|f\|_\infty \|g\|_{BV}.$$

ist dann offensichtlich.

Bemerkung: (a) Jede monotone Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist von beschränkter Variation und $\|g\|_{BV} = |g(b) - g(a)|$.

(b) Jede reellwertige Funktion von beschränkter Variation ist die Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen.

(c) Ist $g \in C^1([a, b])$, so ist g von beschränkter Variation, $\|g\|_{BV} = \int_a^b |g'(t)|\, dt$, und

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \int_a^b f(t) g'(t)\, dt.$$

Dies gilt auch für so-genannte *absolut-stetige* Funktionen $g : [a, b] \to \mathbb{C}$. Ende Do 21.06.18

(d) Setzen wir $BV_0([a, b]) := \{g \in BV([a, b]) : g(a) = 0\}$, so ist $(BV_0([a, b]), \| \cdot \|_{BV})$ ein Banachraum. Auf $BV([a, b])$ ist hingegen $\| \cdot \|_{BV}$ keine Norm wegen etwa $\|1_{[a,b]}\|_{BV} = 0$.

(e) Eine Funktion von beschränkter Variation hat in jedem Punkt $t \in [a, b]$ einseitige Grenzwerte. Für jedes $g \in BV([a, b])$ gibt es eine abzählbare Menge $M \subseteq [a, b]$ so, dass g in jedem $t \in [a, b] \setminus M$ stetig ist.

5.8. Satz: Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-triviales kompaktes Intervall. Jedes $\phi \in (C[a, b])'$ hat eine Darstellung als ein Stieltjes-Integral

$$\phi(f) = \int_a^b f(t)\, dg(t), \quad f \in C[a, b],$$

wobei $g \in BV_0([a, b])$ und $\|\phi\| = \|g\|_{BV}$.

Beweis. $C[a, b]$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}_b([a, b])$, und nach Hahn-Banach hat ϕ eine Fortsetzung $\psi \in \mathcal{B}_b([a, b])'$ mit $\|\psi\| = \|\phi\|$. Wir definieren $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ durch $g(a) = 0$ und $g(t) := \psi(1_{[a,t]})$ für $t \in (a, b]$. Dann gilt für $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und

$\varepsilon_j = \operatorname{sgn}(g(t_j) - g(t_{j-1}))$, $j = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |g(t_j) - g(t_{j-1})| &= \varepsilon_1 g(t_1) + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j (g(t_j) - g(t_{j-1})) \\
&= \varepsilon_1 \psi(1_{[a,t_1]}) + \sum_j \varepsilon_{j=2}^{n} (\psi(1_{[a,t_j]}) - \psi(1_{[a,t_{j-1}]})) \\
&= \psi\Big(\varepsilon_1 1_{[a,t_1]} + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j 1_{(t_{j-1},t_j]}\Big) \\
&\leq \|\psi\| \|\varepsilon_1 1_{[a,t_1]} + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j 1_{(t_{j-1},t_j]}\|_\infty \leq \|\phi\|.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\|g\|_{BV} \leq \|\phi\|$.

Jedes $f \in C[a,b]$ ist gleichmäßig stetig und somit konvergiert

$$f(a + \frac{b-a}{n}) 1_{[a, a+\frac{b-a}{n}]} + \sum_{k=2}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) 1_{(a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]}$$

gegen f für $n \to \infty$ in $\mathcal{B}_b([a,b])$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\phi(f) &= \psi(f) = \lim_{n\to\infty} f(a + \frac{b-a}{n}) \psi(1_{[a,a+\frac{b-a}{n}]}) + \sum_{k=2}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \psi(1_{(a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})(g(a + k\frac{b-a}{n}) - g(a + (k-1)\frac{b-a}{n})) \\
&= \int_a^b f(t)\, dg(t),
\end{aligned}$$

womit die gewünschte Darstellung bewiesen ist. Über die Abschäzung in 5.7 erhalten wir daraus

$$|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_{BV}, \quad f \in C[a,b],$$

dh $\|\phi\| \leq \|g\|_{BV}$. □

5.9. Diskussion und Beweis von 5.4: Die Funktion $g \in BV_0[a,b]$ in 5.8 ist nicht eindeutig bestimmt. Wir erhalten Eindeutigkeit, wenn wir verlangen, dass g in jedem Punkt $t \in (a,b]$ rechtsseitig stetig ist. Für stetiges f ändert dies die Integrale $\int_a^b f(t)\, dg(t)$ nicht, und in der Situation von 5.8 wird auch die Norm $\|g\|_{BV}$ nicht geändert. Wir gehen im folgenden von solch einer Funktion g aus. Wir definieren nun

$$\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \widetilde{g}(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < a, \\ g(a+) & \text{für } t = a, \\ g(t) & \text{für } t \in (a,b], \\ g(b) & \text{für } t > b. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{g}$ ist von beschränkter Variation auf $\mathbb{R}$ und rechtsseitig stetig. Durch $\mu((c,d]) = \widetilde{g}(d) - \widetilde{g}(c)$ für alle $-\infty \leq c < d \leq \infty$ wird ein eindeutig bestimmtes komplexes Maß μ auf den Borel-Mengen von $\mathbb{R}$ induziert (insbesondere ist μ σ-additiv). Die Funktion $\widetilde{g}(t) = \mu((-\infty, t])$ entsprihht dabei der Verteilungsfunktion von μ. Das komplexe Maß kann geschrieben werden als

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4),$$

wobei μ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, positive endliche Maße auf den Borelmengen von $\mathbb{R}$ sind, die außerhalb von $[a, b]$ verschwinden. Wir setzen $\|\mu\| := \|g\|_{BV}$ (beachte, dass $\|g\|_{BV[a,b]} = \|\widetilde{g}\|_{BV(I)}$ für jedes kompakte Interval $I \supseteq [a, b]$ mit $\min I < a$ gilt). Die μ_j können so gewählt werden, dass $\|\mu\| = \sum_{j=1}^{4} \mu_j(\mathbb{R})$ gilt.

Jede beschränkte Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kann bzgl. μ integriert werden, und

$$\int f\, d\mu := \int f\, d\mu_1 - \int f\, d\mu_2 + i\Big(\int f\, d\mu_3 - \int f\, d\mu_4\Big).$$

Insbesondere können auch beschränkte Borel-messbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integriert werden. Für $f \in C[a, b]$ gilt dabei

$$\int_{[a,b]} f\, d\mu = \int_a^b f(t) dg(t) = \phi(f)$$

wobei in der Mitte das Stieltjes-Integral aus 5.7 steht und g und ϕ wie in 5.8 sind.

Durch $f \mapsto \int_{[a,b]} f\, d\mu$ ist also eine Fortsetzung $\psi \in \mathcal{B}_b([a, b])'$ von $\phi \in C([a, b])'$ gegeben und der Lebesguesche Kovergenzsatz (angewendet auf jedes der μ_j) gibt die σ-Stetigkeit von ψ:

Ist (f_n) eine Folge beschränkter Borel-messbarer Funktionen (dh $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$), die beschränkt punktweise gegen $f \in \mathcal{B}_b([a, b])$ konvergiert, so gilt $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$, dh $\psi(f_n) \to \psi(f)$.

Wir haben 5.4 für den Fall $K = [a, b]$ bewiesen. Zum Beweis des Satzes für allgemeines K setzen wir $a := \min K$, $b := \max K$ und stellen fest, dass $C([a, b]) \to C(K)$, $f \mapsto f|_K$, surjektiv ist. Damit ist $C(K)$ ein Quotient von $C([a, b])$, also $C(K)'$ ein abgeschlossener Teilraum von $C([a, b])'$.

Es reicht, die Surjektivität für reellwertige Funktionen einzusehen. Die Menge $[a, b] \setminus K$ ist disjunkte Vereinigung von höchstens abzählbar vielen offenen Intervallen $I_j = (a_j, b_j)$. Wir setzen eine reellwertige Funktion $f \in C(K)$ zu einer Funktion $F \in C[a, b]$ fort, indem wir $F(t) := \frac{t-a_j}{b_j-a_j} f(a_j) + \frac{b_j-t}{b_j-a_j} f(b_j)$ für $t \in I_j$ setzen und $F(t) := f(t)$ für $t \in K$. Dann gilt $F|_K = f$, $\|F\|_{\infty,[a,b]} = \|f\|_{\infty,K}$ und $f \mapsto F$ ist sogar linear. Alternativ kann man den folgenden allgemeinen Satz verwenden.

Fortsetzungssatz von Tietze-Urysohn. Sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann gibt es eine stetige beschränkte Fortsetzung $F : X \to \mathbb{R}$ von f mit $\sup F(X) = \sup f(A)$ und $\inf F(X) = \inf f(A)$.

Im Beweis setzt man z.B. $F(x) := \inf_{y\in A}(f(y)d(x,y))/d(x,A)$ für $x \in X \setminus A$. Siehe etwa Dieudonné, Foudations of Modern Analysis.

5.10. Definition: Sei A ein linearer Operator in H, dh $A : H \supseteq D(A) \to H$ ist linear.

(i) A heißt *symmetrisch*, falls $(Ax|y) = (x|Ay)$ für alle $x, y \in D(A)$.

(ii) Ist A dicht definiert, so heißt A *selbstadjungiert*, falls $A = A^*$.

Wir erinnern daran, dass in der Situation von (ii), der adjungierte Operator A^* von A gegeben ist durch

$$x \in D(A^*) \text{ und } A^*x = y \iff \forall z \in D(A) : (Az|x) = (z|y).$$

Bemerkung: Ist A dicht definiert in H, so ist A symmetrisch genau dann, wenn $A \subseteq A^*$, wobei $A \subseteq A^*$ bedeutet, dass für $x \in D(A)$ gilt $x \in D(A^*)$ und $A^*x = Ax$.

Insbesondere ist jeder selbstadjungierte Operator symmetrisch. Außerdem ist jeder selbstadjungierte Operator abgeschlossen.

Bemerkung: Ist A symmetrisch, so ist $(Ax|x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in D(A)$ wegen

$$(Ax|x) = (x|Ax) = \overline{(Ax|x)}.$$

5.11. Lemma: Ist A dicht definiert und symmetrisch in H, dann ist A abschließbar der Abschluss $\overline{A}$ ist symmetrisch.

Beweis. Nach der Bemerkung oben gilt $A \subseteq A^*$, und A^* ist stets abgeschlossen. Also gilt auch $\overline{A} \subseteq A^*$. Außerdem gilt $A^* = (\overline{A})^*$, was man anhand der Definition zeigen kann. □

Erinnerung: In der Situation von 5.11 gilt nach 1.17 (da H ja reflexiv ist):

$$A \text{ ist abschließbar} \iff A^* \text{ ist dicht definiert.}$$

Der Beweis dort zeigt außerdem, dass in diesem Fall gilt $\overline{A} = (A^*)^*$. Ende Di 26.06.18

5.12. Lemma: Sei A symmetrisch und abgeschlossen. Dann ist für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ der Operator $z - A$ injektiv und $R(z - A)$ ist abgeschlossen. Ist $R(z - A) = H$, so gilt $\|R(z, A)\| \leq 1/|\mathrm{Im}\, z|$.

Beweis. Da A symmetrisch ist, gilt für $x \in D(A)$ und $\xi + i\eta \in \mathbb{C}$ mit $\eta \neq 0$ nach der Bemerkung vor 5.11:

$$\begin{aligned} \|(\xi + i\eta - A)x\|^2 &= (\xi^2 + \eta^2)\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,((\xi + i\eta)x|Ax) + \|Ax\|^2 \\ &= (\xi^2 + \eta^2)\|x\|^2 - 2\xi(x|Ax) + \|Ax\|^2 \\ &= \eta^2\|x\|^2 + \|(\xi - A)x\|^2 \geq \eta^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Da $\xi + i\eta - A$ abgeschlossen ist, folgt die Behauptung. □

5.13. Satz: Ist A ein selbstadjungierter Operator in H, so gilt $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ und $\|R(z, A)\| \leq |\mathrm{Im}\, z|^{-1}$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Beweis. Wir haben $(z - A)^* = \overline{z} - A$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sind nach 5.12 die Operatoren $z - A$, $\overline{z} - A$ injektiv und $R(z - A)$ ist abgeschlossen. Nun gilt

$$R(z - A)^\perp = \{y \in H : \forall x \in D(A) : ((z - A)x|y) = 0\} = N((z - A)^*) = N(\overline{z} - A) = \{0\},$$

dh $R(z - A) = H$, und wir erhalten $z \in \rho(A)$. Die Normabschätzung ist aus 5.12. □

5.14. Satz: Für jeden dicht definierten Operator A in H sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) A ist abschließbar und $\overline{A}$ ist selbstadjungiert.

(ii) A ist symmetrisch und $\sigma(\overline{A}) \subseteq \mathbb{R}$.

(iii) A ist symmetrisch und es gibt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ so, dass $z - A^*$ und $\overline{z} - A^*$ injektiv sind.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Ist $\overline{A}$ selbstadjungiert, so ist $\overline{A}$ und damit auch A symmetrisch. $\sigma(\overline{A}) \subseteq \mathbb{R}$ gilt nach 5.13.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Nach 5.11 ist $\overline{A}$ symmetrisch. Weiter gilt $(\overline{A})^* = A^*$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt somit $z, \overline{z} \in \sigma(A^*)$ und $z - A^*$, $\overline{z} - A^*$ sind injektiv.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Nach 5.11 ist A abschließbar und $\overline{A} \subseteq A^* = (\overline{A})^*$. Nach 5.12 (samt Beweis) folgt aus der Voraussetzung $z, \overline{z} \in \rho(\overline{A})$, und daraus dann $\overline{z}, z \in \rho(A^*)$. Wir erhalten $\rho(\overline{A}) \cap \rho(A^*) \neq \emptyset$, was wegen $\overline{A} \subseteq A^*$ nur für $A = A^*$ sein kann. □

Bemerkung: Wir haben hier verwendet: Sind B, C abgeschlossene Operatoren in einem Banachraum X mit $B \subseteq C$ und gibt es $\lambda \in \rho(B) \cap \rho(C)$, so folgt $B = C$.

Zum Beweis beachte, dass $\lambda - C : D(C) \to X$ bijektiv ist, so dass $\lambda - B : D(B) \to X$ nicht surjektiv sein kann, wenn $D(B)$ eine echte Teilmenge von $D(C)$ ist.

5.15. Definition: Ein dicht definierter symmetrischer Operator A in H heißt *wesentlich selbstadjungiert*, falls sein Abschluss $\overline{A}$ selbstadjungiert in H ist.

Bemerkung: Nach 5.14 ist ein dicht definierter und symmetrischer Operator A wesentlich selbstadjungiert genau dann, wenn die Operatoren $i - A^*$ und $-i - A^*$ beide injektiv sind. Wir kommen später darauf zurück.

Wir werden den Funktionalkalkül von Satz 5.6 auf unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren A ausdehnen. Dies geschieht mittels einer orthogonalen Zerlegung von H bzgl. eines beschränkten selbstadjungierten Operators B, der Resolventen von A enthält.

5.16. Lemma: Sei A selbstadjungiert in H und sei

$$B := \frac{1}{2i}(R(i, A)^* - R(i, A)), \quad C := \frac{-1}{2}(R(i, A) + R(i, A)^*).$$

Dann sind $B, C \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, es gilt $BA \subseteq AB = C$, B ist injektiv und $0 \leq B \leq I$ (im Sinne von 4.8).

Beweis. Selbstadjungiertheit von B und C ist klar. Wegen $R(i, A)^* = R(-i, A)$ erhalten wir leicht $BA \subseteq AB$. Wegen $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I$ gilt

$$AB = \frac{1}{2i}(AR(-i, A) - AR(i, A)) = \frac{1}{2i}(-iR(-i, A) - iR(i, A)) = C.$$

Nach 5.12 gilt $\|R(\pm i, A)\| \leq 1$, und wir erhalten $B \leq I$. Für $x \in H$ und $y = R(i, A)x$ gilt hingegen

$$(Bx|x) = \frac{1}{2i}((x|R(i, A)x) - (R(i, A)x|x)) = \mathrm{Im}\,(x|R(i, A)x) = \mathrm{Im}\,((i - A)y|y) = (y|y) \geq 0.$$

Somit ist $B \geq 0$. Andererseits impliziert $Bx = 0$, dass $y = 0$ und weiter $x = 0$, da $R(i, A)$ injektiv ist. Somit ist B injektiv. $\square$

Bemerkung: Nach der Resolventengleichung 1.6(a) gilt

$$B = \frac{1}{2i}(R(-i, A) - R(i, A)) = \frac{1}{2i}((2i)R(i, A)R(-i, A)) = R(i, A)R(i, A)^*,$$

und die Eigenschaften von B folgen auch aus dieser Darstellung.

Wir verwenden den Funktionalkalkül Ψ aus 5.6 für den Operator B und schreiben $f(B) := \Psi(f)$ für $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(B))$. Ist f definiert auf einer Obermenge von $\sigma(B)$, so schreiben wir $\mathrm{s}f(B) := (f|_{\sigma(B)})(B)$. Beachte, dass $\sigma(B) \subseteq [0, 1]$ wegen 5.16 und 4.3 und dass $0 \notin \sigma_p(B)$ nach 5.16.

5.17. Satz: Sei A ein selbstadjungierter Operator in H, und seien B, C wie in 5.16. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $\theta_n, s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\theta_n := 1_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$ und $s_n(t) := \frac{1}{t}\theta_n(t)$, und setze $P_n := \theta_n(B)$. Dann gilt

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist P_n eine orthogonale Projektion in H und

$$P_n A \subseteq AP_n = s_n(B)C \in \mathcal{L}(H).$$

(b) Für $H_n := R(P_n)$ gilt $H_n \subseteq D(A)$, $A(H_n) \subseteq H_n$ und $H_n \perp H_k$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \neq k$. Der Operator $A_n := A|_{H_n} \in \mathcal{L}(H_n)$ ist selbstadjungiert im Hilbertraum H_n.

(c) Es gilt

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n x \quad \text{für alle } x \in H \text{ (Konvergenz in } H)$$

und

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x \in H : \sum_{n\in\mathbb{N}} \|AP_n x\|^2 < \infty\} \\ Ax &= \sum_{n\in\mathbb{N}} AP_n x \quad \text{für alle } x \in D(A) \text{ (Konvergenz in } H). \end{aligned}$$

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sigma(A_n) \subseteq \sigma(A) \cap \left([-\sqrt{n}, -\sqrt{n-1}] \cup [\sqrt{n-1}, \sqrt{n}]\right).$$

Beweis. (a) Wegen $ts_n(t) = \theta_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, erhalten wir $Bs_n(B) = \theta_n(B) = P_n$. Somit gilt nach 5.16:

$$AP_n = ABs_n(B) = Cs_n(B) \stackrel{(*)}{=} s_n(B)C \in \mathcal{L}(H)$$

(mehr zur Gleichheit $(*)$ unten im Beweis von (d)). Weiter gilt wegen 5.16:

$$P_n A = Bs_n(B)A = s_n(B)BA \subseteq s_n(B)AB = s_n(B)C = AP_n.$$

Nach 5.6 gilt $P_n^2 = P_n$ und $P_n^* = P_n$.

(b) Jedes H_n ist ein abgeschlossener Teilraum von H und also selbst ein Hilbertraum. Nach (a) gilt $AP_n \in \mathcal{L}(H)$, also $H_n \subset D(A)$ und für $x \in H_n$:

$$P_n Ax = AP_n x = Ax, \quad \text{dh } Ax \in H_n.$$

Somit ist $A(H_n) \subseteq H_n$. Für $x \in H_n$, $y \in H_k$ und $n \neq k$ gilt nach 5.6:

$$(x|y) = (P_n x|P_k y) = (\underbrace{P_k P_n}_{=0} x|y) = 0,$$

und somit $H_n \perp H_k$. Schließlich ist $A_n \in \mathcal{L}(H_n)$ selbstadjungiert in H_n, da Symmetrie von A vererbt wird.

(c) Wir setzen $P_0 := 1_{\{0\}}(B)$ und $H_0 := P_0(H) = R(P_0)$. P_0 ist eine orthogonale Projektion und $BP_0 = (0 \cdot 1_{\{0\}})(B) = 0$ nach 5.6, also $H_0 \subseteq N(B) = \{0\}$ nach 5.16. Somit gilt $P_0 = 0$. Wegen 5.6 erhalten wir also

$$I_H = 1_{[0,1]}(B) = 1_{(0,1]}(B) + P_0 = 1_{(0,1]}(B).$$

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{m} \theta_n = 1_{(\frac{1}{m+1},1]} \to 1_{(0,1]} \quad \text{beschränkt punktweise für } m \to \infty.$$

Wegen 5.6 erhalten wir für jedes $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|\sum_{n=1}^{m} P_n x - x\|^2 &= \|1_{(0,\frac{1}{m+1}]}(B)x\|^2 = (1_{(0,\frac{1}{m+1}]}(B)x|1_{(0,\frac{1}{m+1}]}(B)x) \\ &= (1_{(0,\frac{1}{m+1}]}(B)x|x) \to 0 \ (m \to \infty), \end{aligned}$$

da $1_{(0,\frac{1}{m+1}]} \to 0$ beschränkt punktweise für $m \to \infty$. Da die Summanden orthogonal sind, folgt $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|^2$. Für $x \in D(A)$ ist also

$$Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} AP_n x \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \|AP_n x\|^2 = \|Ax\|^2 < \infty.$$

Nun sei $x \in H$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|AP_n x\|^2 < \infty$. Dann konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} AP_n x$ in H, und wegen (b) erhalten wir

$$x_m := \sum_{n=1}^{m} P_n x \in D(A), \quad Ax_m = \sum_{n=1}^{m} AP_n$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$, und $x_m \to x$ in H, $Ax_m \to y := \sum_{n\in\mathbb{N}} AP_n x$ in H für $m \to \infty$. Da A abgeschlossen ist, folgt $x \in D(A)$ und $Ax = \sum_{n\in\mathbb{N}} AP_n x$.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist H_n invariant unter B, da $BP_n = B\theta_n(B) = \theta_n(B)B$ nach 5.6. Wir setzen $B_n := B|_{H_n}$. Da B mit Resolventen von A kommutiert, ist der Raum H_n invariant unter Resolventen von A. Also gilt f"ur jedes $\lambda \in \rho(A)$, dass $\lambda \in \rho(A_n)$ und

$$R(\lambda, A_n) = R(\lambda, A)|_{H_n}$$

ist (insbesondere ist $\sigma(A_n) \subseteq \sigma(A)$): Für $\lambda \in \rho(A)$ ist der Operator $\lambda - A_n$ als Einschränkung von $\lambda - A$ injektiv. Außerdem gilt für $y \in H_n$ und $x := R(\lambda, A)$, dass $x \in H_n$ und $(\lambda - A_n)x = (\lambda - A)R(\lambda, A)y = y$, dh $\lambda - A_n : H_n \to H_n$ ist surjektiv. Somit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = R(i, A_n)R(-i, A_n), \quad B_n^{-1} = (i - A_n)(-i - A_n) = 1 + A_n^2.$$

Wegen $\sigma(B_n) \subseteq [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ nach 5.6 gilt somit $\sigma((1 + A_n^2)^{-1}) \subseteq [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Wegen *spectral mapping* folgt daraus $\sigma(A_n^2) \subseteq [n-1, n]$ und schließlich

$$\sigma(A_n) \subseteq [-\sqrt{n}, -\sqrt{n-1}] \cup [\sqrt{n-1}, \sqrt{n}],$$

womit (d) gezeigt ist. □

Bemerkung: Aus 5.17 folgt auch Ende Do 28.06.18

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(A_n)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(A_n)$$

wobei für die letzte Gleichung verwendet wird, dass nach (d) für jede Cauchy Folge in $\bigcup_n \sigma(A_n)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine konvergente Teilfolge in $\sigma(A_{n_0})$ gibt. Wir erhalten so

$$\sigma(A) \cap (-\sqrt{n}, -\sqrt{n-1}) \cup (\sqrt{n-1}, \sqrt{n}) = \sigma(A_n) \cap (-\sqrt{n}, -\sqrt{n-1}) \cup (\sqrt{n-1}, \sqrt{n})$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

In 5.17 haben wir den Raum H orthogonal zerlegt in abgeschlossene Teilräume H_n, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $H_n \subseteq D(A)$, $A_n := A|_{H_n} \in \mathcal{L}(H_n)$ und A_n selbstadjungiert in H_n ist und einem beschränkten Teil des Spektrums von A entspricht. Wir wenden nun 5.6 auf jeden der Operatoren A_n an und definieren so den Funktionalkalkül für A für beschränkte Borel-messbare Funktionen auf dem Spektrum $\sigma(A)$.

5.18. Satz: Sei A ein selbstadjungierter Operator in H und für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien P_n, H_n, A_n wie in 5.17. Für $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(A))$ definieren wir

$$f(A)x := \sum_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)P_n x, \quad x \in H.$$

Dann ist $f(A) \in \mathcal{L}(H)$ wohl-definiert, $\|f(A)\| \leq \|f\|_\infty$, und die Abbildung

$$\Psi : \mathcal{B}_b(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H), \quad f \mapsto f(A),$$

ist ein Algebrenhomomorphismus mit $\Psi(1_{\sigma(A)}) = I$, $\Psi((z-(\cdot))^{-1}) = R(z, A)$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Für $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(A))$ gilt $\Psi(f)^* = \Psi(\overline{f})$. Insbesondere ist jedes $f(A)$ normal, $f(A)$ ist selbstadjungiert für reellwertiges f, und $f(A) \geq 0$ für $f \geq 0$.

Konvergiert $f_m \to f$ beschränkt punktweise für $m \to \infty$, so gilt $f_m(A)x \to f(A)x$ für jedes $x \in H$.

Beweis. Wegen $f(A_n) \in \mathcal{L}(H_n)$ mit $\|f(A_n)\| \leq \|f\|_{\infty,\sigma(A_n)} \leq \|f\|_{\infty,\sigma(A)}$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f(A_n)P_n x\|^2 \leq \|f\|^2_{\infty,\sigma(A)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|^2 = \|f\|^2_{\infty,\sigma(A)}\|x\|^2, \quad x \in H.$$

Also konvergiert $\sum_n f(A_n)P_n x$ und

$$\|f(A)x\| = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f(A_n)P_n x\|^2\Big)^{1/2} \leq \|f\|_{\infty,\sigma(A)}\|x\|.$$

Daraus folgt, dass $\Psi : \mathcal{B}_b(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$ linear und stetig ist mit Norm ≤ 1. $\Psi(1_{\sigma(A)}) = I_H$ folgt aus 5.17(c). Für $x \in H$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt (wegen 5.17(d) und Beweis)

$$R(z,A)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} R(z,A)P_n x = \sum_{n\in\mathbb{N}} R(z,A_n)P_n x.$$

Nach 4.7 gilt $R(z,A_n) = (z-(\cdot))^{-1}(A_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also ist $R(z,A) = \Psi((z-(\cdot))^{-1})$ gezeigt.

Beachte, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$P_m f(A)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_m f(A_n)P_n x = f(A_m)P_m x.$$

Somit haben wir für $f, g \in \mathcal{B}_b(\sigma(A))$ und $x \in H$:

$$(gf)(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (gf)(A_n)P_n x = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(A_n)f(A_n)P_n x = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(A_n)P_n f(A)x = g(A)(f(A)x),$$

und Ψ ist multiplikativ. Da die Summanden orthogonal sind, gilt für $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(A))$ und $x, y \in H$:

$$\begin{aligned}
(f(A)x|y) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (P_n f(A)x|P_n y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f(A_n)P_n x|P_n y)_{H_n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (P_n x|f(A_n)^* P_n)_{H_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (P_n x|\overline{f}(A_n)P_n(y))_{H_n} \\
&= (x|\overline{f}(A)y),
\end{aligned}$$

woraus $f(A)^* = \overline{f}(A)$ folgt.

Die Aussagen zu Normalität, Selbstadjungiertheit und Positivität erhalten wir wie gehabt. Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{B}_b(\sigma(A))$, die beschränkt punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Da Ψ linear ist, können wir $f = 0$ annehmen. Wir haben nun zunächst für den Funktionalkalkül aus 5.6, dass $f_m(A_n)x \to 0$ für $m \to \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in H_n$: Schreibe

$$\|f_m(A_n)x\|^2 = (f_m(A_n)^* f_m(A_n)x|x) = (|f_m|^2(A_n)x|x) \to 0,$$

da $|f_m|^2 \to 0$ beschränkt punktweise. Somit gilt für festes $x \in H$:

$$f_m(A_n)P_n x \to 0 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Setzen wir $M := \sup_{m\in\mathbb{N}} \|f_m\|_\infty$, so gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\|f_m(A)x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_m(A_n)P_n x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_m(A_n)P_n x\|^2 + M \sum_{n>N} \|P_n x\|^2.$$

Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ finden wir N so, dass $M\sum_{n>N} \|P_n x\|^2 \leq \varepsilon/2$, und dann m_0 so, dass $\sum_{n=1}^{N} \|f_m(A)P_n x\|^2 \leq \varepsilon/2$ für alle $m \geq m_0$. Damit ist $f_m(A)x \to 0$ in H gezeigt. $\square$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\Psi : \mathcal{B}_b(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$ mit den angegebenen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Außerdem kann man zeigen, dass $P_n = (\theta_n \circ \psi)(A)$, wobei $\psi(z) = \frac{1}{1+z^2}$, so dass $P_n = \eta_n(A)$ gilt, wobei $\eta_n = 1_{(-\sqrt{n}, -\sqrt{n-1}] \cup [\sqrt{n-1}, \sqrt{n})}$.

Wir reißen kurz einen weiteren Aspekt des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren an.

5.19. Spektralmaße: Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum H und Ψ der Funktionalkalkül aus 5.18. Für alle $x, y \in H$ ist durch

$$\mu_{x,y} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \quad M \mapsto \mu_{x,y}(M) := (\Psi(1_M)x|y) = (1_M(A)x|y),$$

ein komplexes Borelmaß auf $\mathbb{R}$ gegeben. Für $x = y$ ist $\mu_{x,x}$ ein positives endliches Maß mit

$$\mu_{x,x}(\mathbb{R}) = (1_{\mathbb{R}}(A)x|x) = (x|x) = \|x\|^2,$$

dh für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ ist $\mu_{x,x}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$.

Für jedes $f \in \mathcal{B}_b(\sigma(A))$ hat man die Darstellung

$$(f(A)x|y) = \int f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda).$$

Dies schreibt man als

$$f(A) = \int f(\lambda)\, dE(\lambda),$$

wobei das *Spektralmaß* oder die *Spektralzerlegung* E von A gegeben ist durch

$$E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(H), \quad M \mapsto E(M) := \Psi(1_M) = 1_M(A).$$

Beachte, dass E nicht σ-additiv bzgl. der Operatornormtopologie ist. Nach 5.18 ist aber $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to H$, $M \mapsto E(M)x$, σ-additiv für jedes $x \in H$. Für $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ und $x \in H$ gilt dann

$$\|f(A)x\|^2 = (f(A)x|f(A)x) = (|f|^2(A)x|x) = \int |f|^2\, d(E(\cdot)x|x).$$

Man kann so auch $f(A)$ als (i.a.) *unbeschränkten* Operator in H für jede Borel-messbare Funktion $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ definieren auf

$$D(f(A)) = \{x \in H : \int |f|^2\, d(E(\cdot)x|x) < \infty\},$$

siehe etwa Rudin, Functional Analysis.

Der folgende Satz ist eine weitere Version des Spektralsatzes (hier ohne Beweis, siehe etwa Davies, Spectral Theory and Differential Operators).

5.20. Spektralsatz (Multiplikatorversion): Sei A ein selbstadjungierter Operator im separablen Hilbertraum H. Dann gibt es einen σ-endlichen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, eine messbare Funktion $m : \Omega \to \sigma(A)$ und einen unitären Operator $U : H \to L^2(\mu)$ so, dass

$$D(A) = \{x \in H : m \cdot Ux \in L^2(\mu)\}, \quad Ax = U^{-1}\big(m \cdot Ux).$$

Den Funktionalkalkül für A erhält man dann aus dem Funktionalkalkül für den Multiplikationsoperator $f \mapsto m \cdot f$ in $L^2(\mu)$.

Wir kommen zurück zur Frage nach der Selbstadjungiertheit von symmetrischen Operatoren in der Situation von 5.12.

5.21. Lemma: Sei A symmetrisch und abgeschlossen. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Im} \mu > 0$ gilt

$$\operatorname{codim} R(\lambda - A) = \operatorname{codim} R(\mu - A).$$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Wir zeigen die Behauptung für $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $|\lambda - \mu| < |\operatorname{Im} \lambda|$. Das Lemma folgt dann z.B. mit $\lambda = \pm in$ und $n \to \infty$. Wir setzen $X := [D(A)]$. Nach 5.12 ist $\lambda - A$ injektiv und $Y := R(\lambda - A)$ ist abgeschlossen. Setze $Z := X \times Y^\perp$ und betrachte

$$\widehat{z - A} : X \times Y^\perp \to H, \quad (x, y) \mapsto (z - A)x + y, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Für $z = \lambda$ ist dieser Operator bijektiv mit Inverser $Rh := ((\lambda - A)^{-1}Ph, (I - P)h)$, wobei P die Orthogonalprojektion von H auf Y bezeichnet. Ist $|\mu - \lambda| < |\operatorname{Im} \lambda|$, so ist

$$\widehat{\mu - A} = \widehat{\lambda - A} + (\mu - \lambda)\pi_1 = (I_H + (\mu - \lambda)\pi_1 R)\widehat{\lambda - A},$$

wobei $\pi_1 : X \times Y^\perp \to H$, $(x, y) \mapsto x$, und $\|\pi_1 R\| = \|(\lambda - A)^{-1}P\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1/|\operatorname{Im} \lambda|$ nach 5.12. Somit gilt

$$(\widehat{\mu - A})^{-1} = R \sum_{k=0}^{\infty} (-\pi_1 R)^k (\mu - \lambda)^k$$

und $\widehat{\mu - A}$ ist bijektiv $X \times Y^\perp \to H$. Insbesondere gilt $R(\mu - A) + Y^\perp = H$. Außerdem gilt für $x \in D(A)$ mit $(\mu - A)x = -y \in Y^\perp$, dass $\widehat{\mu - A}(x, y) = 0$, also $x = 0 = y$, woraus folgt $R(\mu - A) \cap Y^\perp = \{0\}$. Somit ist $Y^\perp$ ein Komplement in H sowohl für $R(\lambda - A)$ als auch für $R(\mu - A)$, insbesondere ist $\operatorname{codim} R(\lambda - A) = \operatorname{codim} R(\mu - A)$. □

Ende Di 03.07.18

Bemerkung: Der Beweis ist sehr ähnlich zu denen für Fredholmoperatoren. Die Zahlen $n_\pm(A) := \operatorname{codim} R(\pm i, A)$ heißen *Defektindizes*. Man kann zeigen, dass A genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung hat, wenn $n_+(A) = n_-(A)$.

Ist A zusätzlich positiv, dh $(Ax|x) \geq 0$ für alle $x \in D(A)$, dann kann man genauso zeigen, dass $n_+(A) = n_-(A) = \operatorname{codim}(\mu + A)$ für jedes $\mu > 0$. In diesem Fall hat A immer selbstadjungierte Fortsetzungen.

6 Sektorielle Operatoren und holomorpher Funktionalkalkül

6.1. Die Dirichletform: Wir erinnern an den *Divergenzsatz*:

> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $U \supseteq \overline{\Omega}$ offen. Für $F \in C^1(U)$ gilt
> $$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F \, d\sigma,$$
> wobei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$ die äußere Einheitsnormale bezeichnet.

Setzen wir $F = \overline{v}\nabla u$, so erhalten wir

Folgerung: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $U \supseteq \overline{\Omega}$ offen, so gilt für $u \in C^2(U)$ und $v \in C^1(U)$:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx = -\int_\Omega (\Delta u)\overline{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\overline{v} \, d\sigma. \qquad (*)$$

Nun sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beliebiges Gebiet. Für $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ definieren wir

$$\mathfrak{a}(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx.$$

Dann ist $\mathfrak{a} : W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{C}$ sesquilinear, es gilt $\mathfrak{a}(u,v) = \overline{\mathfrak{a}(v,u)}$ für alle $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ und

$$\operatorname{Re} \mathfrak{a}(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq 0.$$

Beachte, dass gilt

$$\begin{aligned}
(u|v)_{W^{1,2}} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + u\overline{v} \, dx = \mathfrak{a}(u,v) + (u|v)_{L^2} \\
\|u\|_{W^{1,2}}^2 &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 \, dx = \operatorname{Re} \mathfrak{a}(u,u) + \|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathfrak{a}(\cdot,\cdot) + (\cdot|\cdot)_{L^2}$ ein Skalarprodukt auf $W^{1,2}(\Omega)$ und $W^{1,2}(\Omega)$ ist bzgl. dieses Skalarproduktes vollständig. Dasselbe gilt für den in $W^{1,2}(\Omega)$ abgeschlossenen Teilraum

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}}}.$$

Der Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ besteht aus den Funktionen, die "auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω verschwinden", in dem Sinne, dass sie sich in der $W^{1,2}$-Norm durch C^∞-Funktionen, deren Träger eine kompakte Teilmenge von Ω ist, approximieren lassen. Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist, sind auch $W_0^{1,2}(\Omega)$ und $W^{1,2}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$.

Wir werden den Laplaceoperator mit Dirichlet- und mit Neumann-Randbedingungen in beliebigen Gebieten $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mithilfe der Dirichletform $\mathfrak{a}$ auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ bzw. auf $W^{1,2}(\Omega)$ definieren. Dazu beachten wir, dass wir für beschränktes Ω mit C^1-Rand und eine offene Obermenge U von $\overline{\Omega}$ haben:

- Für $u \in C^2(U)$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $v \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt
$$\mathfrak{a}(u, v) = \int_\Omega (-\Delta u)\overline{v}\, dx = (-\Delta u|v)_{L^2}.$$
- Für $u \in C^2(U)$ mit $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial\Omega$ und $v \in C^1(U)$ gilt
$$\mathfrak{a}(u, v) = \int_\Omega (-\Delta u)\overline{v}\, dx = (-\Delta u|v)_{L^2}.$$

Wir werden die Möglichkeit, lineare Operatoren (insbesondere selbstadjungierte) durch Sesquilinearformen zu definieren, in größerer Allgemeinheit untersuchen.

6.2. Sesquilinearformen: Sei H ein Hilbertraum und $V \subseteq H$ ein dichter Teilraum. Eine Sesquilinearform $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt

- *symmetrisch*, falls $\mathfrak{a}(u, v) = \overline{\mathfrak{a}(v, u)}$ für alle $u, v \in V$,
- *akkretiv*, falls $\operatorname{Re} \mathfrak{a}(u, u) \geq 0$ für alle $u \in V$,
- *sektoriell*, falls es ein $\omega \in [0, \pi/2)$ gibt mit $\mathfrak{a}(u, u) \in \Sigma_\omega$ für alle $u \in V$, wobei $\Sigma_0 := [0, \infty)$ und
$$\Sigma_\omega := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leq \omega\} \cup \{0\} \qquad \text{für } \omega \in (0, \pi/2).$$
In diesem Fall heißt $\mathfrak{a}$ *sektoriell vom Winkel* ω.

Ist $\mathfrak{a}$ sektoriell vom Winkel ω, so ist $\mathfrak{a}$ akkretiv und
$$|\operatorname{Im} \mathfrak{a}(u, u)| \leq \tan\omega \ \operatorname{Re} \mathfrak{a}(u, u), \qquad u \in V.$$

Die zu $\mathfrak{a}$ *adjungierte Form* $\mathfrak{a}^* : V \times V \to \mathbb{C}$ ist definiert durch $\mathfrak{a}^*(u, v) = \overline{\mathfrak{a}(v, u)}$. Klar ist $(\mathfrak{a}^*)^* = \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^* \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{a}$ ist symmetrisch; $\mathfrak{a}$ ist akkretiv $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a}^*$ ist akkretiv; $\mathfrak{a}$ ist sektoriell vom Winkel $\omega \Leftrightarrow \mathfrak{a}^*$ ist sektoriell vom Winkel ω.

Für jedes Sesquilinearform $\mathfrak{a}$ sind
$$\operatorname{Re} \mathfrak{a} := \frac{1}{2}\big(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^*\big), \qquad \operatorname{Im} \mathfrak{a} := \frac{1}{2i}\big(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^*\big)$$
symmetrische Sesquilinearformen und es gilt $\mathfrak{a} = \operatorname{Re} \mathfrak{a} + i \operatorname{Im} \mathfrak{a}$.

WARNUNG: Es ist $(\operatorname{Re}\mathfrak{a})(u,u) = \operatorname{Re}\big(\mathfrak{a}(u,u)\big)$ für alle $u \in V$, aber $(\operatorname{Re}\mathfrak{a})(u,v)$ ist i.a. nicht reell! Entsprechendes gilt für $\operatorname{Im}\mathfrak{a}$.

Abschätzungen: Ist $\mathfrak{a}$ sektoriell vom Winkel ω, so gilt für alle $u, v \in V$:

$$\begin{aligned}
|(\operatorname{Re}\mathfrak{a})(u,v)| &\leq \operatorname{Re}\mathfrak{a}(u,u)^{1/2}\operatorname{Re}\mathfrak{a}(v,v)^{1/2}, \\
|(\operatorname{Im}\mathfrak{a})(u,v)| &\leq (\tan\omega)\operatorname{Re}\mathfrak{a}(u,u)^{1/2}\operatorname{Re}\mathfrak{a}(v,v)^{1/2}, \\
|\mathfrak{a}(u,v)| &\leq (1+\tan\omega)\operatorname{Re}\mathfrak{a}(u,u)^{1/2}\operatorname{Re}\mathfrak{a}(v,v)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Beweis. Die erste Ungleichung ist Cauchy-Schwarz, und die dritte Ungleichung folgt aus den ersten beiden. Zm Beweis der zweiten Ungleichung können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $(\operatorname{Im} a)(u,v)$ reell ist (sonst multiplizieren wir u mit einem geeigneten $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $|\gamma| = 1$). Dann gilt

$$(\operatorname{Im}\mathfrak{a})(u,v) = \frac{1}{4}\big((\operatorname{Im}\mathfrak{a})(u+v,u+v) - (\operatorname{Im}\mathfrak{a})(u-v,u-v)\big),$$

wegen der Sektorialität von $\mathfrak{a}$ also

$$\begin{aligned}
|(\operatorname{Im}\mathfrak{a})(u,v)| &\leq \frac{\tan\omega}{4}\big((\operatorname{Re}\mathfrak{a})(u+v,u+v) + (\operatorname{Re}\mathfrak{a})(u-v,u-v)\big) \\
&= \frac{\tan\omega}{2}\big(\operatorname{Re}\mathfrak{a}(u,u) + \operatorname{Re}\mathfrak{a}(v,v)\big).
\end{aligned}$$

Für jedes $\alpha > 0$ gilt also

$$\begin{aligned}
|(\operatorname{Im}\mathfrak{a})(u,v)| &= |(\operatorname{Im}\mathfrak{a})(\alpha u, \alpha^{-1} v)| \\
&\leq \frac{\tan\omega}{2}\big(\alpha^2\operatorname{Re}\mathfrak{a}(u,u) + \alpha^{-2}\operatorname{Re}\mathfrak{a}(v,v)\big).
\end{aligned}$$

Ist $\operatorname{Re}\mathfrak{a}(v,v)\operatorname{Re}\mathfrak{a}(u,u) = 0$ folgt die Behauptung für $\alpha \to 0+$ oder $\alpha \to \infty$. Ist $\operatorname{Re}\mathfrak{a}(v,v)\operatorname{Re}\mathfrak{a}(u,u) \neq 0$, so folgt die Behauptung mit $\alpha = \big(\operatorname{Re}\mathfrak{a}(v,v)/\operatorname{Re}\mathfrak{a}(u,u)\big)^{1/4}$. □

Bemerkung: Ist $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ sektoriell vom Winkel ω und $\delta > 0$, so definiert

$$(u|v)_V := (\operatorname{Re}\mathfrak{a})(u,v) + \delta(u|v)_H$$

ein Skalarprodukt auf V (in der Regel nimmt man $\delta = 1$, alle diese Skalarprodukte sind äquivalent). In diesem Fall heißt die Sesquilinearform $\mathfrak{a}$ *abgeschlossen (auf V)*, falls V bzgl. $(\cdot|\cdot)_V$ ein Hilbertrtaum ist. Offensichtlich ist $\mathfrak{a}$ abgeschlossen genau dann, wenn $\mathfrak{a}^*$ abgeschlossen ist.

Beispiel: In 6.1 ist die Dirichletform $\mathfrak{a}$ symmetrisch, sektoriell vom Winkel 0 und abgeschlossen sowohl auf $W^{1,2}(\Omega)$ als auch auf $W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir können also den folgenden Satz in beiden Situationen anwenden.

6.3. Satz: Sei H ein Hilbertraum und $V \subseteq H$ ein dichter Teilraum. Sei $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, die sektoriell vom Winkel ω und abgeschlossen ist. Definiere den linearen Operator A in H dadurch, dass für alle $u, f \in H$ gilt:

$$u \in D(A) \text{ und } Au = f \ :\Longleftrightarrow \ u \in V \text{ und } \forall v \in V : \mathfrak{a}(u, v) = (f|v).$$

Dann ist A ein abgeschlossener Operator in H, $D(A)$ ist dicht in $(V, (\cdot|\cdot)_V)$, es gilt $\sigma(A) \supseteq \Sigma_\omega$ und

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1/d(\lambda, \Sigma_\omega) \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\omega.$$

Weiter gilt $(Ax|x)_H \in \Sigma_\omega$ für alle $x \in D(A)$. Definiert man auf diese Weise einen Operator zur adjungierten Form $\mathfrak{a}^*$, so erhält man den Operator A^*. Insbesondere ist A selbstadjungiert in H, wenn $\mathfrak{a}$ symmetrisch ist.

Ende Do 05.07.18

Bemerkung: Beachte, dass durch die Vorschrift (wegen Dichtheit von V in H) tatšachlich ein linearer Operator definiert A in H wird. Dieser wird als der *zu* $\mathfrak{a}$ *assoziierte Operator* bezeichnet, was manchmal $A \sim \mathfrak{a}$ notiert wird.

Beweis. Wir bezeichnen mit V^* den *Antidualraum* von $(V, (\cdot|\cdot)_V)$, dh den Raum aller stetigen antilinearen Funktionale $\phi : V \to \mathbb{C}$. Wir betrachten den Operator

$$\mathcal{B} : V \to V^*, \quad u \mapsto \mathfrak{a}(u, \cdot) + (u|\cdot)_H,$$

der nach den Abschätzungen in 6.2 stetig ist. Für $u \in V$ mit $\|u\|_V = 1$ gilt

$$\|\mathcal{B}u\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V=1} |\mathfrak{a}(u, v) + (u|v)_H| \geq |\mathfrak{a}(u, u) + (u|u)_H| \geq \operatorname{Re} \mathfrak{a}(u, u) + \|u\|_H^2 = \|u\|_V^2 = 1,$$

also ist $\mathcal{B}$ injektiv und $R(\mathcal{B})$ abgeschlossen in V^*. Außerdem ist $R(\mathcal{B})$ dicht in V^*, sonst gäbe es (wegen Reflexivität von V und Hahn-Banach) ein $v \in V$ mit $\mathcal{B}(u)(v) = 0$ für alle $u \in V$, was wegen der Abschätzung eben nicht sein kann. Somit ist $\mathcal{B} : V \to V^*$ ein Isomorphismus und hat eine stetige Inverse $\mathcal{R} : V^* \to V$ mit Norm ≤ 1.

Wir identifizieren H mit seinem Antidualraum H^*. Da V dicht und stetig in H eingebettet ist, ist die Injektion $H^* \to V^*$ stetig. Also haben wir stetige Einbettungen $V \hookrightarrow H = H^* \hookrightarrow V^*$. Hier wird also $h \in H$ identifiziert mit $(h|\cdot)_H\Big|_V \in V^*$.

Nun setzen wir $R := \mathcal{R}|_H$. Dann gilt $R \in \mathcal{L}(H)$ und R ist injektiv (da $\mathcal{R}$ injektiv ist). Wir definieren $A := R^{-1} - I_H$. Dann ist A ein abgeschlossener linearer Operator in H und $(A+1)^{-1} = R \in \mathcal{L}(H)$, dh $-1 \in \rho(A)$. Weiter gilt für $u, f \in H$:

$$\begin{aligned} u \in D(A),\ Au = f &\iff R(f+u) = u \iff u \in V \text{ und } \mathcal{R}(f+u) = u \\ &\iff u \in V \text{ und } \mathcal{B}u = u + f \\ &\iff u \in V \text{ und } \forall v \in V : \mathfrak{a}(u, v) + (u|v)_H = (u|v)_H + (f|v)_H \\ &\iff u \in V \text{ und } \forall v \in V : \mathfrak{a}(u, v) = (f|v)_H. \end{aligned}$$

$D(A)$ ist dicht in V: Es gilt $D(A) = R(R) = \mathcal{R}(H)$. Da $\mathcal{R} : V^* \to V$ ein Isomorphismus ist, reicht zu zeigen, dass $H = H^*$ dicht in V^* ist. Andernfalls gäbe es aber $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $(h|v)_H = 0$ für alle $h \in H$, was zum Widerspruch $\|v\|_H = 0$ führt.

Für alle $u \in D(A)$ gilt offensichtlich $(Au|u)_H = \mathfrak{a}(u,u) \in \Sigma_\omega$. Sei nun der Operator B zur Form $\mathfrak{a}^*$ definiert durch

$$v \in D(B) \text{ und } Bv = g \;:\Longleftrightarrow\; v \in V \text{ und } \forall w \in V : \mathfrak{a}^*(v,w) = (g|w).$$

Dann gilt für $u \in D(A)$ und $v \in D(B)$: $u, v\|V\|$ und

$$(Au|v) = \mathfrak{a}(u,v) = \overline{\mathfrak{a}^*(v,u)} = \overline{(Bv|u)} = (u|Bv).$$

Es folgt $v \in D(A^*)$ und $A^*v = Bv$, dh $B \subseteq A^*$. Wegen $-1 \in \rho(B)$ und $-1 \in \rho(A^*)$ (was aus $-1 \in \rho(A)$ folgt) erhalten wir $B = A^*$. Ist $\mathfrak{a}$ symmetrisch, so ist $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$ und wir erhalten $A = A^*$, dh A ist selbstadjungiert. $\square$

Beispiele: (1) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beliebiges Gebiet, so ist der Dirichlet-Laplace $-\Delta_D$ auf Ω der Operator, der zur Dirichletform $\mathfrak{a}$ aus 6.1 auf $V_D = W_0^{1,2}(\Omega)$ assoziiert ist, und der Neumann-Laplace $-\Delta_N$ auf Ω ist der Operator, der zur Dirichletform $\mathfrak{a}$ aus 6.1 auf $V_N = W^{1,2}(\Omega)$ assoziiert ist. Beachte, dass zwar $V_D \subseteq V_N$ gilt, dass aber $D(-\Delta_D) \not\subseteq D(-\Delta_N)$ ist, da wegen $-1 \in \rho(-\Delta_D) \cap \rho(-\Delta_N)$ sonst $-\Delta_D = -\Delta_N$ wäre.

(2) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $a : \Omega \to \mathbb{C}^{d\times d}$ beschränkt und messbar so, dass $\overline{\xi}^t a(x)\xi \in \Sigma_\omega$ für fast alle $x \in \Omega$, alle $\xi \in \mathbb{C}^d$ und ein $\omega \in [0, \pi/2)$. Es gebe $\eta > 0$ mit

$$\operatorname{Re} \overline{\xi}^t a(x)\xi \geq \eta|\xi|^2 \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und alle } \xi \in \mathbb{C}^d.$$

Dann ist die Sesquilinearform

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int_\Omega (a(x)\nabla u) \cdot \overline{\nabla v}\, dx, \qquad u, v \in V = W^{1,2}(\Omega),$$

sektoriell vom Winkel ω und abgeschlossen in $H = L^2(\Omega)$. Der assoziierte Operator ist formal gegeben durch $Au = -\operatorname{div}(a(\cdot)\nabla u)$ mit Randbedingung $\nu \cdot a(\cdot)\nabla u = 0$ auf $\partial\Omega$.

6.4. Abschließbare Formen: Sei H ein Hilbertraum und $V \subseteq H$ ein dichter Teilraum, sowie $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ eine sektorielle Form, die nicht abgeschlossen ist. Man kann $\mathfrak{a}$ auf natürliche Weise zu einer Sesquilinearform $\widetilde{\mathfrak{a}}$ auf der Vervollständigung $\widetilde{V}$ von $(V, (\cdot|\cdot)_V)$ fortsetzen. Diese Form ist wieder sektoriell vom selben Winkel. Um Satz 6.3 anwenden zu können, muss man $\widetilde{V}$ als Teilraum von H realisieren. Das geht genau dann, wenn gilt:

Für jede $\|\cdot\|_V$-Cauchyfolge (u_n) in V mit $\|u_n\|_H \to 0$ gilt $\|u_n\|_V \to 0$.

Man bezeichnet solche Formen als *abschließbar*. Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass die stetige Fortsetzung der Einbettung $J : V \to H$, $u \mapsto u$, auf $\widetilde{V}$ *injektiv* ist. In diesem Fall bezeichnet man $\widetilde{\mathfrak{a}}$ als *Abschluss von* $\mathfrak{a}$.

Beispiele: (1) Ist A dicht definiert und symmetrisch in H mit $(Ax|x) \geq 0$ für alle $x \in D(A)$, so definiert $\mathfrak{a}(u,v) := (Au|v)$ auf $V := D(A)$ eine symmetrische Sesquilinearform, die sektoriell vom Winkel 0 ist. Diese Form ist abschließbar (vgl. Übungsaufgabe) und der Abschluss dieser Form ist assoziiert zur sogenannten *Friedrichs-Fortsetzung von* $\widetilde{A}$. Beachte, dass $\widetilde{A}$ selbstadjungiert in H ist mit $(\widetilde{A}u|u) \geq 0$ für alle $u \in D(\widetilde{A})$.

(2) Sei $H = L^2(0,1)$, $V = C[0,1]$ und $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\mathfrak{a}(u,v) = u(0)\overline{v(0)}$. Dann ist $\mathfrak{a}$ symmetrisch und sektoriell, aber nicht abschließbar. Betrachte etwa $u_n(t) = (1-nt)1_{[0,1/n]}(t)$. Dann ist (u_n) Cauchy bzgl. $\|u\|_V = \sqrt{|u(0)|^2 + \|u\|_{L^2}^2}$ mit $\|u_n\|_{L^2} \to 0$, aber $\|u_n\|_V \to 1$.

Ende Di 10.07.18

6.5. Quadratwurzeln: Sei A selbstadjungiert in H mit $(Ax|x) \geq 0$ für alle $x \in D(A)$ und seien P_n, H_n und A_n, wie in 5.17.Wir definieren den Opeartor $A^{1/2}$ durch

$$\begin{aligned} D(A^{1/2}) &= \{x \in H : \sum_n \|A_n^{1/2} P_n x\|^2 < \infty\}, \\ A^{1/2} x &= \sum_n A_n^{1/2} P_n x \quad \text{für } x \in D(A^{1/2}). \end{aligned}$$

Dann gilt $D(A) \subseteq D(A^{1/2})$ und $D(A)$ ist dicht in $D(A^{1/2})$ bzgl. der Graphennorm von $A^{1/2}$. Weiter ist $A^{1/2}$ selbstadjungiert in H und $A^{1/2} \geq 0$, sowie $A^{1/2}A^{1/2} = A$, dh

$$D(A) = \{x \in D(A^{1/2}) : A^{1/2}x \in D(A^{1/2})\}, \qquad Ax = A^{1/2}A^{1/2}x \text{ für } x \in D(A).$$

Beweisskizze. Für die Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(H_n)$ können wir 5.6 verwenden, insbesondere ist $A_n^{1/2}$ selbstadjungiert in H_n mit $A_n^{1/2}A_n^{1/2} = A_n$. Für $x \in D(A)$ gilt nach Cauchy-Schwarz

$$\sum_n \|A_n^{1/2} P_n x\|^2 = \sum_n (A_n P_n | P_n x) \leq \Big(\sum_n \|A_n P_n x\|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_n \|P_n x\|^2\Big)^{1/2} = \|Ax\|\|x\|,$$

also haben wir $D(A) \subseteq D(A^{1/2})$. Die Menge aller $x \in H$ mit $P_n x \neq 0$ nur für endlich viele n liegt in $D(A)$ und ist dicht in $D(A^{1/2})$ bzgl. der Graphennorm von $A^{1/2}$. Klar ist Symmetrie von $A^{1/2}$. Wegen $-1 - A = (i \pm A^{1/2})(i \mp A^{1/2})$ ist $i \pm A^{1/2}$ surjektiv. Selbstadjungiertheit folgt dann aus 5.12 und 5.14. Der Nachweis der algebraischen Eigenschaft ist leicht. □

Sei nun V dicht in H und $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ symmetrisch, sektoriell und abgeschlossen, sowie $A \sim \mathfrak{a}$. Dann gilt

$$D(A^{1/2}) = V \quad \text{und} \quad \|A^{1/2}u\|_H = \mathfrak{a}(u,u) \text{ für } u \in V.$$

Beweis. Für $u \in D(A) \subseteq D(A^{1/2}) \cap V$ gilt

$$\mathfrak{a}(u,u) = (Au|u) = (A^{1/2}u|A^{1/2}u) = \|A^{1/2}u\|_H^2,$$

und $D(A)$ ist dicht sowohl in $\big(D(A^{1/2}), \big(\|u\|_H^2 + \|A^{1/2}u\|_H^2\big)^{1/2}\big)$ als auch (nach 6.3) in $\big(V, \big(\mathfrak{a}(u,u) + \|u\|_H^2\big)^{1/2}\big)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Square Root Prblem (Kato '61/'62: Sei V dicht in H, $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ symmetrisch, sektoriell und abgeschlossen, sowie $A \sim \mathfrak{a}$, $B \sim \operatorname{Re} \mathfrak{a}$. Gilt $D(B^{1/2}) = D(A^{1/2})$ und $\|B^{1/2}u\| \sim \|A^{1/2}u\|$? Hierbei wird $B^{1/2}$ über den holomorphen Funktionalkalkül definiert (siehe unten).

Die Antwort ist i.a. "Nein" (McIntosh). Die Antwort ist "Ja" für elliptische Operatoren in Divergenzform $A = -\operatorname{div}(a(\cdot)\nabla)$ auf dem $\mathbb{R}^d$ (McIntosh et al. '01).

6.6. Operatoren mit kompakter Resolvente: Sei V dicht in H, $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ symmetrisch, sektoriell und abgeschlossen, sowie $A \sim \mathfrak{a}$. Dann sind äquivalent

(i) A hat kompakte Resolventen,

(ii) die Einbettung $V \hookrightarrow H$ ist kompakt,

(iii) $A^{1/2}$ hat kompakte Resolventen.

In diesem Falle kann man die Eigenwerte von A (mit Vielfachheit gezählt) der Größe nach ordnen $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ und es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die "Minimax"-Formel

$$\lambda_n = \inf\{\lambda(L) : L \subseteq V, \dim L = n\},$$

wobei $\lambda(L) = \max\{\mathfrak{a}(u,u) : u \in L, \|u\| = 1\}$.

Beweis. Wir wählen eine zugehörige orthonormale Folge (e_n) aus Eigenvektoren. Dann gilt $Au = \sum_j \lambda_j (u|e_j)e_j$, $A^{1/2}u = \sum_j \lambda_j^{1/2}(u|e_j)e_j$, sowie $\mathfrak{a}(u,u) = \sum_j \lambda_j |(u|e_j)|^2$. Klar ist $\lambda_1 = \inf\{\mathfrak{a}(u,u) : u \in V\}$. Sei nun $n \ge 2$ und $M_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Dann gilt $\lambda(M_n) = \lambda_n$. Sei umgekehrt L Teilraum von V der Dimension n und $Pu := \sum_{j=1}^{n-1}(u|e_j)e_j$ die Orthogonalprojektion in H auf M_{n-1}. Aus Dimensionsgründen finden wir $u_0 \in L$ mit $\|u_0\| = 1$ und $Pu_0 = 0$, dh mit $u_0 \perp e_j$ für $j = 1, \dots, n-1$. Es ist dann

$$\mathfrak{a}(u_0,u_0) = \sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j |(u_0|e_j)|^2 \ge \lambda_n \sum_{j=n}^{\infty} |(u_0|e_j)|^2 = \lambda_n \|u_0\|^2 = \lambda_n.$$

Die Aussage ist bewiesen. □

Mehr dazu findet man in Abschnitt 4.5 von Davies: Spectral Theoy and Differential Operators.

Beispiele: (1) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, dann ist die Einbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt. Wir können die Formel also auf den Dirichlet-Laplace auf Ω anwenden.

(2) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, dann ist die Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt. Wir können die Formel also auf den Neumann-Laplace auf Ω anwenden.

6.7. Spektralprojektionen: Sei A ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum X. Es gelte $\sigma(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, wobei $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$, σ_0 kompakt ist und σ_1 abgeschlossen. Wir finden endlich viele geschlossene stückweise C^1-Kurven Γ in $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ so, dass

$$n(z,\Gamma) = \begin{cases} 1 & , z \in \sigma_0 \\ 0 & , z \in \sigma_1 \end{cases},$$

wobei $n(z,\Gamma) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ die *Windungszahl* ist, die angibt, wie oft der Punkt z von Γ im mathematisch positiven Sinne umlaufen wird. Sei

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, A)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 R(\gamma(t), A)\dot\gamma(t)\,dt$$

wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine reguläre Parametrisierung von Γ ist und das Integral ein Riemann-Integral mit Werten in $\mathcal{L}(X)$ ist.

Der Operator P hat die folgenden Eigenschaften:

(a) $P \in \mathcal{L}(X)$ und $P^2 = P$, dh P ist eine Projektion.

(b) P kommutiert mit A, dh für $x \in D(A)$ gilt $Px \in D(A)$ und $APx = PAx$. Weiter gilt $X_0 := R(P) \subseteq D(A)$.

(c) Setzen wir $A_0 := A|_{X_0}$, so gilt $A_0 \in \mathcal{L}(X_0)$ und $\sigma(A_0) = \sigma_0$.

(d) Sei $X_1 := N(P)$ und A_1 definiert als die Einschränkung von A auf $D(A_1) := D(A) \cap X_1$. Dann ist A_1 ein abgeschlossener linearer Operator in X_1 und $\sigma(A_1) = \sigma_1$.

Für den Beweis benötigen wir das Folgende.

6.8. Holomorphe Funktionen mit Werten in einem Banachraum: Der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel gelten für X-wertige holomorphe Funktionen $f : \Omega \to X$:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)$$

wenn Γ eine endliche Familie von geschlossenen stückweise C^1-Kurven ist $n(z,\Gamma) = 0$ für alle $z \notin \Omega$ und $n(z_0,\Gamma) = 1$.

Beweis von 6.7. (a) $P \in \mathcal{L}(X)$ ist wohldefiniert, da $t \mapsto R(\gamma(t), A)\dot\gamma(t)$ stückweise stetig ist mit Werten in $\mathcal{L}(X)$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz hängt P nicht von der speziellen Wahl von Γ ab, so dass wir eine andere Familie Γ' finden mit $n(\lambda, \Gamma') = 1$ für alle $\lambda \in \Gamma$ (Γ' umläuft alle Punkte von Γ genau einmal) und $n(\mu, \Gamma) = 0$ für alle $\mu \in \Gamma'$. Somit ist Γ

"innerhalb" von Γ'. Nach der Resolventengleichung und 6.8 gilt dann

$$\begin{aligned}
P^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma'} R(\lambda, A)R(\mu, A)\, d\mu\, d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma'} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\mu - \lambda}\, d\mu\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{1}{\mu - \lambda}\, d\mu}_{=1}\, R(\lambda, A)\, d\lambda + \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'} \underbrace{\int_\Gamma \frac{R(\mu, A)}{\mu - \lambda}\, d\lambda}_{=0}\, d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda, A)\, d\lambda = P.
\end{aligned}$$

(b) Tatsächlich ist $t \mapsto R(\gamma(t), A)\dot\gamma(t)$ sogar stückweise stetig mit Werten in $\mathcal{L}(X, [D(A)])$, somit gilt $P \in \mathcal{L}(X, [D(A)])$, insbesondere also $R(P) \subseteq D(A)$. Wir haben also

$$AP = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma AR(\lambda, A)\, d\lambda,$$

wobei $t \mapsto AR(\gamma(t), A)\dot\gamma(t)$ stückweise stetig mit Werten in $\mathcal{L}(X)$ ist. Für $x \in D(A)$ gilt $AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax$, woraus $APx = PAx$ folgt. Ende Do 12.07.18

(c) und (d): Da $P \in \mathcal{L}(X)$ eine Projektion ist, ist $X_0 = R(P)$ ein abgeschlossener Teilraum von X. Nach (b) gilt $A_0 : X_0 \to X_0$. Aus der Abgeschlossenheit von A folgt die von A_0, somit ist $A_0 \in \mathcal{L}(X_0)$. Offensichtlich kommutiert P mit den Resolventen von A, weshalb X_0 invariant unter den Resolventen von A ist. Daraus folgt $\sigma(A_0) \subseteq \sigma(A)$, und $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{X_0}$ für $\lambda \in \rho(A)$.

Für $\mu \in \sigma_1$ setzen wir

$$R_\mu := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(\lambda, A)}{\mu - \lambda}\, d\lambda.$$

Dann gilt $R_\mu|_{X_0} \in \mathcal{L}(X_0)$, und wegen $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I_X$ haben wir

$$(\mu - A_0)R_\mu|_{X_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\mu - A)R(\lambda, A)|_{X_0}}{\mu - \lambda}\, d\lambda = P|_{X_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{I_{X_0}}{\mu - \lambda}\, d\lambda = I_{X_0}.$$

Da $R_\mu|_{X_0}$ mit $\mu - A_0$ kommutiert, gilt auch $R_\mu|_{X_0}(\mu - A_0) = I_{X_0}$. Somit ist $\mu \in \rho(A_0)$ und $R(\mu, A_0) = R_\mu|_{X_0}$. Wir haben gezeigt $\sigma(A_0) \subseteq \sigma_0$.

Genauso ist X_1 invariant unter den Resolventen von A, und folglich $\sigma(A_1) \subseteq \sigma(A)$. Für $\mu \in \sigma_0$ sei

$$R_\mu := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(\lambda, A)}{\mu - \lambda}\, d\lambda.$$

Dann kommutiert $R_\mu \in \mathcal{L}(X, [D(A)])$ mit den Resolventen von A, also auch mit P, und $R_\mu|_{X_1} \in \mathcal{L}(X_1)$. Für $x \in X_1$ gilt

$$(\mu - A)R_\mu x = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda, A)x\, d\lambda}_{=Px=0} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{x}{\mu - \lambda}\, d\lambda = -x.$$

Da R_μ mit A kommutiert, erhalten wir $\mu \in \rho(A_1)$ und $R(\mu, A_1) = -R_\mu|_{X_1}$. Also ist $\sigma(A_1) \subseteq \sigma_1$ gezeigt.

Die Zerlegung $X = X_0 \oplus X_1$ führt zu der Zerlegung $\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ von A mit Definitionsbereich $X_0 \oplus D(A_1)$. Damit ist klar, dass $\sigma(A) = \sigma(A_0) \cup \sigma(A_1)$. Wegen $\sigma(A_j) \subseteq \sigma_j$ $(j = 0, 1)$ und $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$ folgt $\sigma(A_j) = \sigma_j$ für $j = 0, 1$. □

6.9. Der Dunfordsche Funktionalkalkül: Sei A ein beschränkter linearer Operator in X. Dann ist $\sigma(A)$ kompakt.

(1) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $\sigma(A)$. Dann finden wir eine endliche Familie von geschlossenen stückweise C^1-Kurven Γ mit $n(z, \Gamma) = 1$ für $z \in \sigma(A)$ und $n(z, \Gamma) = 0$ für $z \notin U$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Setze

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda.$$

Dann gilt $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ und die Definition hängt nicht von der Wahl von Γ ab.

(2) Die Abbildung $\Psi : f \mapsto f(A)$ ist linear und multiplikativ (also ein Algebrenhomomorphismus), und

$$p_n(A) = A^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0, \qquad \text{wobei } p_n(\lambda) := \lambda^n,$$

dh Ψ ist ein Funktionalkalkül für den Operator A für Funktionen, die holomorph in einer Umgebung von $\sigma(A)$ sind.

Beweis. (1) ist klar. (2): Linearität ist klar. Der Beweis der Multiplikativität ist ähnlich zu den Argumenten im Beweis von 6.7(a). Daraus folgt

$$p_n(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^n R(\lambda, A), d\lambda = p_1(A)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Außerdem gilt $A p_0(A) = p_1(A) p_0(A)$. Somit müssen wir noch $p_0(A) = I_X$ zeigen. Wir wenden 6.7 mit $\sigma_0 = \sigma(A)$ und $\sigma_1 = \emptyset$ an. Dann gilt $A_1 \in \mathcal{L}(X_1)$ (da $A \in \mathcal{L}(X)$), und $\sigma(A_1) = \sigma_1 = \emptyset$. Also ist $X_1 = \{0\}$, $X_0 = X$, und $p_0(A) = P = I_X$. □

6.10. Sektorielle Operatoren: Sei X ein Banachraum und $\omega \in [0, \pi)$. Ein linearer Operator A in X heißt *sektoriell vom Winkel* ω, falls $\sigma(A) \subseteq \Sigma_\omega$ und für jedes $\theta \in (\omega, \pi)$ ein $M_\theta > 0$ existiert mit

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{M_\theta}{|\lambda|} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\theta.$$

Warnung: Die Definition dieses Begriffes in der Literatur ist nicht einheitlich!

Beispiel: Sei V dicht im Hilbertraum H, $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ sektoriell vom Winkel $\omega \in [0, \pi/2)$ und abgeschlossen, sowie $A \sim \mathfrak{a}$. Dann ist A sektoriell vom Winkel ω. Insbesondere ist ein selbstadjungierter Operator A mit $A \ge 0$ sektoriell vom Winkel 0.

6.11. Holomorpher Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren: Sei $\omega \in [0,\pi)$, A sektoriell vom Winkel ω im Banachraum X und zusätzlich $D(A)$ dicht in X, A injektiv und $R(A)$ dicht in X.

Bemerkung: (ohne Beweis) Ist $R(A)$ dicht in X, so ist A injektiv. Die Umkehrung gilt, wenn X reflexiv ist.

Bemerkung: Für alle $x \in X$ gilt $\lambda(\lambda+A)^{-1}x \to x$ $(\lambda \to \infty)$ und $A(\lambda+A)^{-1}x \to x$ $(\lambda \to 0+)$, hier soll $\lambda > 0$ reell sein.

Beweis. Es gilt $M := \sup_{\lambda>0} \|\lambda(\lambda+A)^{-1}\| < \infty$ und $\sup_{\lambda>0} \|A(\lambda+A)^{-1}\| \leq M+1$. Es reicht also, Konvergenz auf einer dichten Teilmenge einzusehen. Für $x \in D(A)$ gilt

$$\lambda(\lambda+A)^{-1}x - x = -A(\lambda+A)^{-1}x = -\lambda^{-1}\underbrace{\lambda(\lambda+A)^{-1}Ax}_{\text{beschr.}} \to 0 \quad (\lambda \to \infty),$$

und für $x = Ay \in R(A)$ gilt

$$A(\lambda+A)^{-1}x - x = -\lambda(\lambda+A)^{-1}x = -\lambda\underbrace{A(\lambda+A)^{-1}y}_{\text{beschr.}} \to 0 \quad (\lambda \to 0+).$$

□

Ende Di 17.07.18

Für $\theta \in (0,\pi)$ bezeichne Σ_θ^0 das Innere von Σ_θ, und $H^\infty(\Sigma_\theta^0)$ sei die Menge aller holomorphen Funktionen $\varphi : \Sigma_\theta^0 \to \mathbb{C}$, für die es $\varepsilon, C > 0$ gibt mit $|\varphi(z)| \leq C\min\{|z|^\varepsilon, |z|^{-\varepsilon}\}$ für alle $z \in \Sigma_\theta^0$.

Beispiel: Es gilt $\varphi(z) = \frac{z}{(1+z)^2} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^2} \in H^\infty(\Sigma_\theta^0)$ für jedes $\theta \in (0,\pi)$.

Für $\theta \in (\omega,\pi)$ und $\varphi \in H^\infty(\Sigma_\theta^0)$ setzen wir

$$\varphi(A) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma} \varphi(\lambda)R(\lambda,A)\,d\lambda,$$

wobei $\Gamma_\sigma = \partial\Sigma_\sigma$ mit $\sigma \in (\omega,\theta)$ parametrisiert ist durch $\gamma_\sigma(t) = |t|e^{-i\sigma \operatorname{sgn}(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, und das Integral ein absolut konvergentes uneigentliches Riemann-Integral mit Werten in $\mathcal{L}(X)$ ist (oder ein Bochner-Integral. Beachte dabei, dass auf Γ_σ gilt

$$\|\varphi(\lambda)R(\lambda,A)\| \leq CM_\sigma|\lambda|^{-1}\min\{|\lambda|^\varepsilon, |\lambda|^{-\varepsilon}\} = CM_\sigma\min\{|\lambda|^{\varepsilon-1}, |\lambda|^{-1-\varepsilon}\}.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz hängt die Definition nicht von $\sigma \in (\omega,\theta)$ ab: Man schneide für $\omega < \sigma < \widetilde{\sigma} < \theta$ und $0 < r < R$ die Menge $\Sigma_{\widetilde{\sigma}} \setminus \Sigma_\sigma$ mit $\overline{B}(0,R) \setminus B(0,r)$ und integriere $\varphi(\lambda)R(\lambda,A)$ über den Rand. Nach Cauchy ist das $= 0$. Die Abschätzungen des Integranden über $|\lambda| = R$ bzw. $|\lambda| = r$ lauten $\lesssim r^{\varepsilon-1}$ bzw. $\lesssim R^{-\varepsilon-1}$ mit Intervalllänge $\sim r$ bzw. $\sim R$. Die Integrale über diese Teile gehen also gegen 0 für $r \to 0+$ bzw. $R \to \infty$.

Die Abbildung $H_0^\infty(\Sigma_\theta^0) \to \mathcal{L}(X)$, $\varphi \mapsto \varphi(A)$ ist linear und multiplikativ. Der Beweis für Multiplikativität ist dabei ähnlich zu 6.9. Man muss nur beachten, dass mittels Cauchy für $g \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0)$ gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma} \frac{g(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\mu = \begin{cases} g(\lambda) & ,\lambda \in \Sigma_\sigma^0 \\ 0 & ,\lambda \notin \Sigma_\sigma \end{cases}.$$

Klar ist außerdem, dass $\varphi(A)$ mit den Resolventen von A kommutiert.

Eine erste Erweiterung: Für

$$F \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0) + \operatorname{span}\Big\{\frac{1}{1+z}, 1\Big\} =: \mathcal{E}(\Sigma_\theta^0),$$

dh für $F(z) = \varphi(z) + \frac{a}{1+z} + b$ mit $\varphi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0)$ setzen wir

$$F(A) := \varphi(A) + a(1+A)^{-1} + bI \in \mathcal{L}(X).$$

Dann ist $\mathcal{E}(\Sigma_\theta^0) \to \mathcal{L}(X)$ linear und multiplikativ. Linearität ist wieder klar. Zum Beweis der Multiplikativität sei $G = \psi + \frac{c}{1+z} + d \in \mathcal{E}(\Sigma_\theta^0)$. Wir betrachten das Produkt mit F von oben. Von den neun Termen müssen wir uns nur $\frac{a\psi}{1+z}$, $\frac{c\varphi}{1+z}$ und $\frac{ac}{(1+z)^2}$ näher ansehen.

Lemma 1: Für $\varphi \in \mathcal{E}(\Sigma_\theta^0)$ gilt

$$(1+A)^{-1}\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma} \frac{\varphi(\lambda)}{1+\lambda}\frac{R(\lambda,A)}{}d\lambda.$$

Zum Beweis beachte wieder $(1+A)^{-1}R(\lambda,A) = (1+\lambda)^{-1}(R(\lambda,A)-R(-1,A))$ und verwende den Cauchyschen Satz für Sektoren.

Lemma 2: Ist $F \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0) + \operatorname{span}\{(1+z)^{-1}\}$ holomorph auf einer Umgebung von $\overline{B}(0,\delta)$, so gilt

$$F(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\sigma,\delta}} F(\lambda)R(\lambda,A)\,d\lambda,$$

wobei $\Gamma_{\sigma,\delta} = \partial(\Gamma_\sigma \cup B(0,\delta))$ natürlich parametrisiert ist, dh der Rand wird mit Geschwindigkeit 1 durchlaufen, wobei das umrandete Gebiet links liegt. Für $\delta < 1$ gilt außerdem

$$(1+A)^{-1}F(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\sigma,\delta}} \frac{F(\lambda)}{1+\lambda}R(\lambda,A)\,d\lambda.$$

Beweis. Nach Cauchy ist die Aussage klar für $\varphi \in H_0^\infty$. Wir müssen sie also nur für $F(z) = (1+z)^{-1}$ einsehen, dh wir müssen zeigen

$$(1+A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\sigma,\delta}} \frac{R(\lambda,A)}{1+\lambda}\,d\lambda.$$

Für $R > 1$ integrieren wir dazu über den Rand von $(\mathbb{C} \setminus (\Sigma_\theta \cup B(0,\delta)) \cap B(0,R)$. Nach Cauchy ist dieses Integral $= -R(-1,A) = (1+A)^{-1}$. Für $|\lambda| = R$ hat man für den Integranden die Abschätzung $\lesssim R^{-2}$, wobei die Intervalllänge $\sim R$ ist. Das Integral über diesen Teil lässt sich also abschätzen $\lesssim R^{-1}$ und verschwindet für $R \to \infty$. Die zweite Formel beweist man so ähnlich wie Lemma 1. $\square$

Mittels Lemma 1 und Lemma 2 folgt die Multiplikativität. Wir erhalten außerdem, dass für $\varphi(z) = z(1+z)^{-2} = (1+z)^{-1} - (1+z)^{-2}$ gilt $\varphi(A) = A(1+A)^{-2}$. Dieser Operator ist injektiv.

Beispiel: Für $t > 0$ ist $F(z) = e^{-tz} \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^\circ) + \operatorname{span}\{(1+z)^{-1}\}$. Es gilt dann $e^{-tA}e^{-sA} = e^{-(t+s)A}$ für alle $t > 0$. Nimmt man $\delta = 1/t$, so erhält man als Normabschätzung

$$\|e^{-tA}\| \leq \frac{M_\sigma}{\pi} \int_{1/t}^{\infty} e^{-\cos(\sigma)tr} \frac{dr}{r} + M_\sigma t \int_0^{2\pi} e^{-\operatorname{Re}(te^{i\alpha}/t)}/t \, d\alpha,$$

wobei die rechte Seite unabhängig von t ist. Somit gilt $sup_{t>0}\|e^{-tA}\| < \infty$. Man kann zeigen, dass $z \to e^{-zA}$ analytisch ist auf einem geeigneten Sektor ($\rightarrow$ beschränkt analytische Halbgruppen, Evolutionsgleichungen).

Übrigens gilt für jedes $\varphi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0)$ mittels Abschätzung des Kurvenintegrals $\sup_{t>0} \|\varphi(tA)\| < \infty$.

6.12. Unbeschränkter Funktionalkalkül: In der Situation von 6.11 sei $F : \Sigma_\theta^0 \to \mathbb{C}$ holomorph und so, dass es ein $g \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0)$ mit $Fg \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0)$ und $g(A)$ injektiv gibt. Ein solches g heißt *Regularisierer für F*. Man setzt dann

$$F(A) := g(A)^{-1}(Fg)(A),$$

dh für $x, y \in X$ gilt $x \in D(F(A))$ und $F(A)x = y$ genau dann, wenn $(Fg)(A)x = g(A)y$ ist. Beachte, dass $F(A)$ abgeschlossen ist.

Beispiel: Gibt es ein $C > 0$ mit $|F(z)| \leq C \max\{|z|^{-n}, |z|^n\}$, so ist für $m > n$ die Funktion $z \mapsto z^m(1+z)^{-2m}$ ein Regularisierer für F.

$F(A)$ ist wohldefiniert: Sei h ein weiterer Regularisierer für F. Dann ist auch gh ein Regularisierer für F und $(Fg)(A)x = g(A)y$ ist äquivalent zu $h(A)(Fg)(A)x = h(A)g(A)y$. Links steht $(Fgh)(A)x = g(A)(Fh)(A)x$ und rechts $g(A)h(A)y$. Somit ist dies äquivalent zu $(Fh)(A)x = h(A)y$.

$F \mapsto F(A)$ ist "linear": Ist g Regularisierer für F und h Regularisierer für G, so ist gh Regulariserer für F und für G. Linearität ist jetzt leicht zu zeigen.

$F \mapsto F(A)$ ist "multiplikativ": Es gilt $F(A)G(A) = (FG)(A)$ auf $D(F(A)G(A)) = D(G(A)) \cap D((FG)(A))$

Beweis. Sei g Regularisierer für F und h Regularisierer für G. Dann ist gh Regularisierer für FG. Sei nun zunächst $x \in D(G(A))$ und $G(A)x = y \in D(F(A))$ und $F(A)y = z$. Dann ist

$$(FGgh)(A)x = (Fg)(A)(Gh)(A)x = (Fg)(A)h(A)y = h(A)(Fg)(A)y = h(A)g(A)z = (gh)(A)z,$$

also $x \in D((FG)(A))$ und $(FG)(A)x = z$. Sei umgekehrt $x \in D(G(A)) \cap D((FG)(A))$ und $y = G(A)x$, $z = (FG)(A)x$. Zu zeigen ist dann $y \in D(F(A))$ und $F(A)y = z$. Es ist aber gh Regularisierer für F und

$$(gh)(A)z = (FGgh)(A)x = (Fg)(A)(Gh)(A)x = (Fg)(A)h(A)y = (Fgh)(A)y,$$

woraus dies folgt. $\square$

6.13. Gebrochene Potenzen: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $F_\alpha(z) := z^\alpha$. Dann hat F_α Regularisierer und $A^\alpha := F_\alpha(A)$ ist wohldefiniert. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta} \quad \text{auf} \quad D(A^\alpha A^\beta) = D(A^\beta) \cap D(A^{\alpha+\beta}).$$

6.14. Beschränkter H^∞-Kalkül: Jedes $F \in H^\infty(\Sigma_\theta^0)$ besitzt Regularisierer und $F(A)$ ist ein wohldefinierter abgeschlossener Operator in X. Man sagt, dass A einen *beschränkten $H^\infty(\Sigma_\theta^0)$-Kalkül* besitzt, falls ein $C > 0$ existiert mit

$$\|F(A)\| \leq C\|F\|_{\infty,\Sigma_\theta^0} \quad \text{für alle } F \in H^\infty(\Sigma_\theta^0).$$

Man kann zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn es ein $C > 0$ gibt mit

$$\|\varphi(A)\| \leq \|\varphi\|_{\infty,\Sigma_\theta^0} \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0).$$

Das liegt i.w. an dem sogenannten "Konvergenzlemma". Für mehr dazu und zum beschränkten H^∞-Kalkül verweisen wir auf Kapitel 5 in

M. Haase: The Functional Calculus for Sectorial Operators, Birkhäuser 2006,

bzw. Section 9 in

P. Kunstmann, L. Weis: Maximal L^p-Regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and H^∞-Functional Calculus, in Functional Analytic Methods for Evolution Equations, Springer Lecture Notes 1855, Springer 2004, pp. 65–312.

Beispiel:[2] Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir in $L^2(\mathbb{R}^d)$ den Operator Ende Do 19.07.18

$$A := \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \partial^\alpha \quad \text{mit } D(A) := W^{2m,2}(\mathbb{R}^d),$$

wobei $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| = 2m$. Für $u \in W^{2m,2}(\mathbb{R}^d)$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\widehat{Au}(\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha \hat{u}(\xi).$$

Beachte $(2\pi i\xi)^\alpha = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha$, so dass

$$\widehat{Au}(\xi) = \underbrace{2\pi^{2m}(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \xi^\alpha}_{=:a(\xi)} \hat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

[2] In der Vorlesung nur für $m = 1$ und sehr knapp.

und
$$Au = \mathscr{F}^{-1}(\xi \mapsto a(\xi)\hat{u}(\xi)).$$
Die Funktion $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto a(\xi)$, heißt *Symbol* des Differentialoperators A. Offensichtlich gilt
$$|a(\xi)| \leq C|\xi|^{2m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$
für $C := (2\pi)^{2m} \sum_{|\alpha|=2m} |a_\alpha|$. Der Operator A heißt *elliptisch*, falls es ein $\eta > 0$ gibt mit
$$|a(\xi)| \geq \eta|\xi|^{2m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$
Dies gilt genau dann, wenn $a(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (man kann dann $\eta := \inf\{|a(\xi)| : |\xi| = 1\}$ nehmen, da $|a(\xi)| = |\xi|^{2m}|a(\xi/|\xi|)| \geq \eta|\xi|^{2m}$ für $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$).

Ist A elliptisch, so ist A abgeschlossen in $L^2(\mathbb{R}^d)$, da das Quadrat der Graphennorm
$$\|u\|_2^2 + \|Au\|_2^2 = \|\hat{u}\|_2^2 + \|\widehat{Au}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |a(\xi)|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$
äquivalent ist zu
$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^{4m})|\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi, \text{ dh to } \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \|u\|_{H^{2m,2}}^2.$$
Der Operator A ist unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator $f \mapsto a \cdot f$ mit Definitionsbereich $\{f \in L^2 : a \cdot f \in L^2\}$, und wir haben somit
$$\sigma(A) = \overline{\{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^d\}}.$$
Gilt $a(\xi) \in \Sigma_\omega$ für ein $\omega \in [0, \pi)$, so ist A sektoriell vom Winkel ω in $L^2(\mathbb{R}^d)$; beachte dazu, dass für $\lambda \notin \Sigma_\omega$ gilt
$$(\lambda - A)^{-1} f = \mathscr{F}^{-1}(\xi \mapsto (\lambda - a(\xi))^{-1} \hat{f}(\xi))$$
und somit $\|(\lambda - A)^{-1}\| = \|\lambda - a(\cdot))^{-1}\| = 1/d(\lambda, \sigma(A))$.

Ist $\theta \in (\omega, \pi)$, so gilt für $\varphi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0)$, dass der Operator $\varphi(A)$ das Symbol
$$\xi \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - a(\xi)} \, d\lambda = \varphi(a(\xi))$$
ha, wobei die Cauchyformel für Sektoren verwendet haben. Wir erhalten so die Abschätzung
$$\|\varphi(A)\| \leq \|\varphi\|_{\infty, \Sigma_\omega}, \qquad \varphi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta^0),$$
und A hat einen beschränkten $H^\infty(\Sigma_\theta^0)$-Kalkül für jedes $\theta \in (\omega, \pi)$.