30.09.2019
M.Sc. Michael Ullmann

# Mathematik Vorkurs 2019 für Mathematiker*innen

## 1. Übungsblatt

### Übung 1 (Einige wahre Aussagen und Tautologien)

Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ mathematische Aussagen.

(a) Formulieren Sie die Aussage "*Entweder $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$*" mit logischen Verknüpfungen.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Aussagen

$$(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow [(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})] \text{ und } \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$$

stets wahr sind.

(c) Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel die drei folgenden tautologischen Äquivalenzen

(c1) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \dashv\vDash (\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A})$.
(c2) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \dashv\vDash (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$.
(c3) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \dashv\vDash (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$.

### Übung 2 (Absorptionsgesetze)

Seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Beweisen Sie die Absorptionsgesetze:

(1) $A \cap (A \cup B) = A$.

(2) $A \cup (A \cap B) = A$.

### Übung 3 (Ringschluss)

Seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Beweisen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

(1) $A \subseteq B$.

(2) $A \cap B = A$.

(3) $A \cup B = B$.

### Übung 4 (Aussagen verknüpfen)

Finden Sie Beispiele für die Verknüpfung von Aussagen $(\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$, indem Sie die Aussage

$$\mathcal{A} := \text{"}\textit{Heute ist Montag.}\text{"}$$

mit Aussagen aus der folgenden Liste so verknüpfen, dass Sie mindestens vier weitere wahre Aussagen erhalten:

| | |
|---|---|
| $\mathcal{B}$ := *Heute ist Dienstag.* | $\mathcal{E}$ := *Gestern war Sonntag.* |
| $\mathcal{C}$ := *Heute ist kein Montag.* | $\mathcal{F}$ := *Heute ist Werktag.* |
| $\mathcal{D}$ := *Gestern war kein Montag.* | $\mathcal{G}$ := *Gestern war Wochenende.* |

Zum Beispiel: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{F}$.
Können Sie aus den Aussagen $\mathcal{B}$ bis $\mathcal{F}$ durch Verknüpfung weitere wahre Aussagen erzeugen?

## Übung 5 (Der Barbier von Karlsruhe)

In Karlsruhe gibt es seit Gründung der Stadt das Gesetz, dass alle Personen männlichen Geschlechts sich jeden Morgen zu rasieren haben. Nichteinhaltung dieses Gesetzes wird hart bestraft und es wird daher von jedem Mann befolgt. Um dieser Pflicht nachzukommen, gibt es heutzutage zwei Möglichkeiten: Entweder man rasiert sich selbst oder man sucht den Barbier von Karlsruhe auf, der als einziger seines Fachs beruflich nicht auf Webdesign umgesattelt hat. Dieser ist ein kleiner kauziger Mann, der schon sein ganzes Leben in Karlsruhe verbringt und des Öfteren seine Mitbürger durch seine strikte Definition des Barbierberufs vor Rätsel stellt. Seiner Meinung nach, sei ein Barbier jemand, der diejenigen, und nur diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

**Frage**: Rasiert der Barbier von Karlsruhe sich selbst oder nicht?

## Übung 6 (Die symmetrische Differenz)

Für zwei Mengen $A$ und $B$ definieren wir die sogenannte **symmetrische Differenz** durch

$$A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)\,.$$

Beweisen Sie folgende drei Eigenschaften der symmetrischen Differenz für drei Mengen $A, B$ und $C$:

(1) $A\Delta B = B\Delta A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(2) $(A\Delta B)\, \Delta C = A\Delta\, (B\Delta C)$.

(3) $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\, \Delta\, (B \cap C)$.

Was bedeutet die symmetrische Differenz anschaulich? Zeichnen Sie dazu auch ein entsprechendes Venn-Diagramm.

**Frage**: Wenn $\cap$ ein "*und*" und $\cup$ ein "*oder*" bedeuten, was bedeutet dann die symmetrische Differenz $\Delta$?

## Übung 7 (Wie Steine ins Wasser werfen)

Es seien $A_1, A_2, A_3, A_4$ und $A_5$ Mengen mit der Eigenschaft

$$A_5 \subseteq A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1.$$

Beweisen Sie:

(1) $A_1\setminus (A_2\setminus (A_3\backslash A_4)) = (A_1\backslash A_2) \cup (A_3\backslash A_4)$.

(2) $A_1\setminus (A_2\setminus (A_3\setminus (A_4\backslash A_5))) = (A_1\backslash A_2) \cup (A_3\backslash A_4) \cup A_5$.

Machen Sie sich zuerst anhand eines selbstgewählten Beispiels klar, dass

$$A_1\setminus (A_2\backslash A_3) \neq (A_1\backslash A_2)\,\backslash A_3$$

ist in der Regel, d.h. dass die obige Klammersetzung tatsächlich notwendig ist. Was bedeuten die Aussagen (1) und (2) anschaulich? Denken Sie dabei, was passiert, wenn ein Stein ins Wasser fällt.