30.09.2019
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Mathematik Vorkurs 2019 für Mathematiker*innen

1. Übungsblatt

Übung 1 (Einige wahre Aussagen und Tautologien)

Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ mathematische Aussagen.

(a) Formulieren Sie die Aussage "*Entweder $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$*" mit logischen Verknüpfungen.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Aussagen

$$(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow [(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})] \text{ und } \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$$

stets wahr sind.

(c) Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel die drei folgenden tautologischen Äquivalenzen

(c1) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A})$.
(c2) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \mathrel{=\!\mid\!\models} (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$.
(c3) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \mathrel{=\!\mid\!\models} (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$.

Lösung zu ÜbungÜbung 1

(a) Die Aussage "*Entweder $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$*" wird formal durch

$$(\mathcal{A} \cap \neg\mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$$

beschrieben.
(b) Die Wahrheitstafel dazu lautet:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	$(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow [(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})]$
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	w	w	w
w	f	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	f	w	w	w
f	f	f	w	f	f	w	w	w

Demnach sind die beiden Aussagen

$$(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow [(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})] \text{ und } \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$$

stets wahr.
(c) Wir zeigen erst die beiden ersten Aussagen (c1) und (c2) per Wahrheitstafel:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$
w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	w	w	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	w	w	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	f	w	w	f	f
w	f	f	w	f	f	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	f	f	f	w	f	f

Weiter gilt die Wahrheitstafel für (c3):

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f
w	f	w	w	w	f	w	w
f	w	w	w	f	w	w	w
f	f	w	f	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Übung 2 (Absorptionsgesetze)

Seien A und B zwei Mengen. Beweisen Sie die Absorptionsgesetze:

(1) $A \cap (A \cup B) = A$.

(2) $A \cup (A \cap B) = A$.

Lösung zu ÜbungÜbung 2

(1) Wir zeigen beide Mengeninklusionen: "$\subseteq$": Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (A \cup B) &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in A \cup B)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge ((x \in A) \vee (x \in B))] \\ &\Leftrightarrow [((x \in A) \wedge (x \in A)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B))] \\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B))] \\ &\Rightarrow x \in A, \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$A \cap (A \cap B) \subseteq A.$$

"$\supseteq$": Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow &\ [(x \in A) \vee (x \in B)] \\ \Leftrightarrow &\ x \in A \cup B, \end{aligned}$$

d.h. nun, dass $x \in A \cap (A \cup B)$ ist und damit ist

$$A \cap (A \cup B) \supseteq A.$$

Nach dem Gleichheitskriterium ist also

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

$\square$

(2) **Der schnelle Weg**: Es gilt nach dem Distributivgesetz:

$$A = A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B).$$

Der Beweis wie (1): Wir zeigen beide Mengeninklusionen: "$\subseteq$": Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (A \cap B) &\Leftrightarrow [(x \in A) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B))] \\ &\Rightarrow x \in A, \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$A \cap (A \cap B) \subseteq A.$$

"$\supseteq$": Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow &\ [(x \in A) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B))] \\ \Leftrightarrow &\ [(x \in A) \vee (x \in A \cap B)] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \;\; x \in A \cup (A \cap B)$$

d.h. es ist

$$A \cup (A \cap B) \supseteq A.$$

Nach dem Gleichheitskriterium ist also

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

□

Übung 3 (Ringschluss)

Seien A und B zwei Mengen. Beweisen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

(1) $A \subseteq B$.

(2) $A \cap B = A$.

(3) $A \cup B = B$.

Lösung zu ÜbungÜbung 3

"(1) $\Rightarrow$ (2)": Sei nun $A \subseteq B$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \;\; &\Leftrightarrow \;\; [(x \in A) \wedge (x \in B)] \\ &\Rightarrow \;\; x \in A, \end{aligned}$$

d.h. $A \cap B \subseteq A$. Ist $x \in A$, so ist wegen $A \subseteq B$ auch $x \in B$ und daher ist $x \in A \cap B$, d.h. $A \cap B \supseteq A$. Nach dem Gleichheitskriterium ist

$$A \cap B = A.$$

"(2) $\Rightarrow$ (3)": Sei nun $A \cap B = A$. Dann gilt demnach

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap B) \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap B = B \cap (A \cup B) = B, \end{aligned}$$

da für alle $x \in B$ auch automatisch gilt, dass $x \in A \cup B$ ist, d.h. $B \subseteq A \cup B$ und nach der Implikation "(1) $\Rightarrow$ (2)" folgt das obige.
"(2) $\Rightarrow$ (1)": Sei nun $A \cup B = B$. Ist $x \in A$, so ist $x \in A \cup B = B$, d.h. $x \in B$ und per Definition ist somit $A \subseteq B$.
Per Ringschluss haben wir nun:

$$(1) \;\Rightarrow\; (2) \;\Rightarrow\; (3) \;\Rightarrow\; (1) \;\Rightarrow\; (2),$$

d.h. nun

$$(1) \;\Leftrightarrow\; (2) \;\Leftrightarrow\; (3) \;\Leftrightarrow\; (1).$$

□

Übung 4 (Aussagen verknüpfen)

Finden Sie Beispiele für die Verknüpfung von Aussagen $(\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$, indem Sie die Aussage

$$\mathcal{A} := \text{"}\textit{Heute ist Montag.}\text{"}$$

mit Aussagen aus der folgenden Liste so verknüpfen, dass Sie mindestens vier weitere wahre Aussagen erhalten:

$\mathcal{B}$:= *Heute ist Dienstag.*	$\mathcal{E}$:= *Gestern war Sonntag.*
$\mathcal{C}$:= *Heute ist kein Montag.*	$\mathcal{F}$:= *Heute ist Werktag.*
$\mathcal{D}$:= *Gestern war kein Montag.*	$\mathcal{G}$:= *Gestern war Wochenende.*

Zum Beispiel: $\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \mathcal{F}$.
Können Sie aus den Aussagen $\mathcal{B}$ bis $\mathcal{F}$ durch Verknüpfung weitere wahre Aussagen erzeugen?

Lösung zu ÜbungÜbung 4

Wir können folgende Aussagenverknüpfungen bilden:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{C},\; \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \mathcal{D},\; \mathcal{A} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{E},\; (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \;\Rightarrow\; \mathcal{F} \text{ und } (\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \;\Rightarrow\; \mathcal{A}.$$

Achtung: Die Aussage $\mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{C}$ ist richtig, aber $\mathcal{C} \;\Rightarrow\; \mathcal{B}$ ist falsch! □

Übung 5 (Der Barbier von Karlsruhe)

In Karlsruhe gibt es seit Gründung der Stadt das Gesetz, dass alle Personen männlichen Geschlechts sich jeden Morgen zu rasieren haben. Nichteinhaltung dieses Gesetzes wird hart bestraft und es wird daher von jedem Mann befolgt. Um dieser Pflicht nachzukommen, gibt es heutzutage zwei Möglichkeiten: Entweder man rasiert sich selbst oder man sucht den Barbier von Karlsruhe auf, der als einziger seines Fachs beruflich nicht auf Webdesign umgesattelt hat. Dieser ist ein kleiner kauziger Mann, der schon sein ganzes Leben in Karlsruhe verbringt und des Öfteren seine Mitbürger durch seine strikte Definition des Barbierberufs vor Rätsel stellt. Seiner Meinung nach, sei ein Barbier jemand, der diejenigen, und nur diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Frage: Rasiert der Barbier von Karlsruhe sich selbst oder nicht?

Lösung zu ÜbungÜbung 5

Die Frage ist unter den angegebenen Umständen nicht beantwortbar. Es handelt sich hierbei um eine Version des bekannten "*Russelschen Paradoxon*", welches von Russell um 1900 publiziert wurde. Warum es sich um ein Paradoxon handelt, sehen wir folgendermaßen ein:
Gehen wir davon aus, dass der Barbier sich selbst rasiert, dann wird er von dem Barbier rasiert und rasiert sich per Definition nicht selbst.
Gehen wir davon aus, dass der Barbier sich nicht selbst rasiert, wird er vom Barbier rasiert und rasiert sich somit selbst.

Als Kalkül ausgedrückt, wäre dies

$$(\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \mathcal{A}),$$

wobie die Aussage $\mathcal{A}$ gerade "*Der Barbier rasiert sich selbst*ist. □

Übung 6 (Die symmetrische Differenz)

Für zwei Mengen A und B definieren wir die sogenannte **symmetrische Differenz** durch

$$A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A).$$

Beweisen Sie folgende drei Eigenschaften der symmetrischen Differenz für drei Mengen A, B und C:

(1) $A\Delta B = B\Delta A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(2) $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta\,(B\Delta C)$.

(3) $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\,\Delta\,(B \cap C)$.

Was bedeutet die symmetrische Differenz anschaulich? Zeichnen Sie dazu auch ein entsprechendes Venn-Diagramm.

Frage: Wenn $\cap$ ein "*und*" und $\cup$ ein "*oder*" bedeuten, was bedeutet dann die symmetrische Differenz Δ?

Lösung zu ÜbungÜbung 6

(1) Wegen der Kommutativität der Vereinigung gilt:

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (B\backslash A) \cup (A\backslash B) = B\Delta A.$$

Wegen

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge (x \notin A \cap B) \\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin A \cap B)] \vee [(x \in B) \wedge (x \in A \cap B)] \end{aligned}$$

betrachten wir hier zwei Fälle: $x \in A$ und $x \in B$:
<u>Fall 1.</u> $x \in A$:

$$\begin{aligned} (x \in A) \wedge (x \notin A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \notin A) \vee (x \notin B)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin A)] \vee [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \\ &\Leftrightarrow x \in A \backslash B. \end{aligned}$$

Fall 2. $x \in B$:

$$\begin{aligned} (x \in B) \wedge (x \notin A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge [(x \notin A) \vee (x \notin B)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \notin A)] \vee [(x \in B) \wedge (x \notin B)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \notin A)] \\ &\Leftrightarrow x \in B \backslash A. \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir somit

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B) &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin A \cap B)] \vee [(x \in B) \wedge (x \in A \cap B)] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \backslash B) \vee (x \in B \backslash A) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ &\Leftrightarrow x \in A \Delta B, \end{aligned}$$

und das heißt:

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

(2) Wir zeigen hier beide Mengeninklusionen "$\subseteq$": Sei $x \in (A\Delta B)\,\Delta C$. Wegen

$$\begin{aligned} x \in (A\Delta B)\,\Delta C = (A\Delta B) \backslash C \cup C \backslash (A \Delta B) &\Leftrightarrow (x \in (A\Delta B) \backslash C) \vee (C \backslash (A\Delta B)) \\ &\Leftrightarrow [(x \in A\Delta B) \wedge (x \notin C)] \vee [(x \in C) \wedge (x \notin A\Delta B)] \end{aligned}$$

betrachten wir die beiden Fälle

$$(x \in A\Delta B) \wedge (x \notin C) \text{ und } (x \in C) \wedge (x \notin A\Delta B).$$

Fall 1. $(x \in A\Delta B) \wedge (x \notin C)$ ist wahr. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (x \in A\Delta B) \wedge (x \notin C) &\Leftrightarrow [(x \in A \backslash B) \vee (x \in B \backslash A)] \wedge (x \notin C) \\ &\Leftrightarrow [(x \in A \backslash B) \wedge (x \notin C)] \vee [(x \in B \backslash A) \wedge (x \notin C)]. \end{aligned}$$

Also unterscheiden wir die beiden Fälle

$$[(x \in A \backslash B) \wedge (x \notin C)] \text{ und } [(x \in B \backslash A) \wedge (x \notin C)].$$

Fall 1.1 $(x \in A \backslash B) \wedge (x \notin C)$ ist wahr. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (x \in A \backslash B) \wedge (x \notin C) &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \wedge (x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \notin B) \wedge (x \notin C)] \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cup C) \\ &\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \notin (B \backslash C) \cup (C \backslash B)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B\Delta C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \backslash (B\Delta C). \end{aligned}$$

Fall 1.2 $(x \in B \backslash A) \wedge (x \notin C)$ ist wahr. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (x \in B \backslash A) \wedge (x \notin C) &\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \notin A)] \wedge (x \notin C) \\ &\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \notin C)] \wedge (x \notin A) \\ &\Leftrightarrow (x \in B \backslash C) \wedge (x \notin A) \\ &\Rightarrow (x \in (B \backslash C) \cup (C \backslash B)) \wedge (x \notin A) \\ &\Leftrightarrow (x \in B\Delta C) \wedge (x \notin A) \\ &\Leftrightarrow x \in (B\Delta C) \backslash A. \end{aligned}$$

Fall 2. $(x \in C) \wedge (x \notin A\Delta B)$ ist wahr. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (x \in C) \wedge (x \notin A\Delta B) &\Leftrightarrow (x \in C) \wedge (x \notin (A \cup B) \backslash (A \cap B)) \\ &\Leftrightarrow (x \in C) \wedge [(x \in A \cap B) \vee (x \notin A \cup B)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in C) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in C) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B)]. \end{aligned}$$

Also unterscheiden wir die beiden Fälle

$$[(x \in C) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)] \text{ und } [(x \in C) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B)]\,.$$

Fall 2. $(x \in C) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)$ ist wahr. Dann haben wir

$$\begin{aligned}(x \in C) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \in B) \wedge (x \in C)]\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cap C)\\ &\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \notin (B \cup C) \setminus (B \cap C))\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B\Delta C)\\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus (B\Delta C)\,.\end{aligned}$$

Fall 2.2 $(x \in C) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B)$ ist wahr. Dann haben wir

$$\begin{aligned}(x \in C) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B) &\Leftrightarrow [(x \in C) \wedge (x \notin B)] \wedge (x \notin A)\\ &\Leftrightarrow (x \in C \setminus B) \wedge (x \notin A)\\ &\Rightarrow (x \in (C \setminus B) \cup (B \setminus C)) \wedge (x \notin A)\\ &\Leftrightarrow (x \in B\Delta C) \wedge (x \notin A)\\ &\Leftrightarrow x \in (B\Delta C) \setminus A.\end{aligned}$$

Zusammen haben wir nun gezeigt, dass

$$(A\Delta B)\,\Delta C \subseteq A\Delta\,(B\Delta C)$$

gilt.

"$\supseteq$": Diese erhalten wir aus dem gerade bewiesenen und der Kommutativität:

$$\begin{aligned}A\Delta\,(B\Delta C) &= (B\Delta C)\,\Delta A = (C\Delta B)\,\Delta A\\ &\subseteq C\Delta\,(B\Delta A) = C\Delta\,(A\Delta B)\\ &= (A\Delta B)\,\Delta C.\end{aligned}$$

So folgt nun die Behauptung:

$$A\Delta\,(B\Delta C) = A\Delta\,(B\Delta C)\,.$$

(3) Auch hier zeigen wir wieder beide Mengeninklusionen:

"$\subseteq$": Sei $x \in (A\Delta B) \cap C$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}x \in (A\Delta B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \wedge (x \in C)\\ &\Leftrightarrow [(x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A)] \wedge (x \in C)\\ &\Leftrightarrow [(x \in A \setminus B) \wedge (x \in C)] \vee [(x \in B \setminus A) \wedge (x \in C)]\,.\end{aligned}$$

Also machen wir die Fallunterscheidung:

$$[(x \in A \setminus B) \wedge (x \in C)] \text{ und } [(x \in B \setminus A) \wedge (x \in C)]\,.$$

Fall 1. $(x \in A \setminus B) \wedge (x \in C)$ ist wahr. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(x \in A \setminus B) \wedge (x \in C) &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \wedge (x \in C)\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C)\\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in C)] \wedge (x \notin B)\\ &\Rightarrow (x \in A \cap C) \wedge (x \notin B \cap C)\\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)\\ &\Rightarrow x \in (A \cap C)\,\Delta\,(B \cap C)\,.\end{aligned}$$

Fall 2. $(x \in B \setminus A) \wedge (x \in C)$ ist wahr. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(x \in B \setminus A) \wedge (x \in C) &\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \notin A)] \wedge (x \in C)\\ &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \notin A) \wedge (x \in C)\\ &\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (x \in C)] \wedge (x \notin B)\\ &\Rightarrow (x \in B \cap C) \wedge (x \notin A \cap C)\\ &\Leftrightarrow x \in (B \cap C) \setminus (A \cap C)\\ &\Rightarrow x \in (A \cap C)\,\Delta\,(B \cap C)\,.\end{aligned}$$

Beide Fälle zusammen liefert uns

$$(A\Delta B)\cap C \subseteq (A\cap C)\,\Delta\,(B\cap C)\,.$$

"$\supseteq$": Sei $x \in (A\cap C)\,\Delta\,(B\cap C)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A\cap C)\,\Delta\,(B\cap C) &\Leftrightarrow x \in [(A\cap C)\setminus(B\cap C)] \cup [(B\cap C)\setminus(A\cap C)] \\ &\Leftrightarrow [x \in (A\cap C)\setminus(B\cap C)] \vee [x \in (B\cap C)\setminus(A\cap C)]\,. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden die beiden Fälle:

$$[x \in (A\cap C)\setminus(B\cap C)] \text{ und } [x \in (B\cap C)\setminus(A\cap C)]\,.$$

<u>Fall 1.</u> $x \in (A\cap C)\setminus(B\cap C)$ ist wahr. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A\cap C)\setminus(B\cap C) &\Leftrightarrow [(x\in A)\wedge(x\in C)] \wedge (x\notin B\cap C) \\ &\Leftrightarrow [(x\in A)\wedge(x\in C)] \wedge [(x\notin B)\vee(x\notin C)] \\ &\Leftrightarrow [(x\in A)\wedge(x\in C)\wedge(x\notin B)] \vee [(x\in A)\wedge(x\in C)\wedge(x\notin C)] \\ &\Leftrightarrow [(x\in A\backslash B)\wedge(x\in C)] \\ &\Rightarrow (x\in (A\backslash B)\cup(B\backslash A))\wedge(x\in C) \\ &\Leftrightarrow (x\in A\Delta B)\wedge(x\in C) \\ &\Leftrightarrow x\in (A\Delta B)\cap C. \end{aligned}$$

<u>Fall 2.</u> $x \in (B\cap C)\setminus(A\cap C)$ ist wahr. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (B\cap C)\setminus(A\cap C) &\Leftrightarrow [(x\in B)\wedge(x\in C)] \wedge (x\notin A\cap C) \\ &\Leftrightarrow [(x\in B)\wedge(x\in C)] \wedge [(x\notin A)\vee(x\notin C)] \\ &\Leftrightarrow [(x\in B)\wedge(x\in C)\wedge(x\notin A)] \vee [(x\in B)\wedge(x\in C)\wedge(x\notin C)] \\ &\Leftrightarrow [(x\in B\backslash A)\wedge(x\in C)] \\ &\Rightarrow (x\in (A\backslash B)\cup(B\backslash A))\wedge(x\in C) \\ &\Leftrightarrow (x\in A\Delta B)\wedge(x\in C) \\ &\Leftrightarrow x\in (A\Delta B)\cap C. \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammen ergeben

$$(A\cap C)\,\Delta\,(B\cap C) \subseteq (A\Delta B)\cap C.$$

Also folgt nun die Behauptung

$$(A\cap C)\,\Delta\,(B\cap C) = (A\Delta B)\cap C.$$

$\square$

Bemerkung: Anschaulich sind Elemente in der symmetrischen Differenz zweier Mengen A und B gerade die, die nicht im Schnitt liegen, also entweder in A oder in B. Demnach spiegelt die symmetrische Differenz auch das "*entweder ... oder*" wieder.

Übung 7 (Wie Steine ins Wasser werfen)

Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 Mengen mit der Eigenschaft

$$A_5 \subseteq A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1.$$

Beweisen Sie:

(1) $A_1\setminus(A_2\setminus(A_3\backslash A_4)) = (A_1\backslash A_2)\cup(A_3\backslash A_4)$.

(2) $A_1\setminus(A_2\setminus(A_3\setminus(A_4\backslash A_5))) = (A_1\backslash A_2)\cup(A_3\backslash A_4)\cup A_5$.

Machen Sie sich zuerst anhand eines selbstgewählten Beispiels klar, dass

$$A_1\setminus(A_2\backslash A_3) \neq (A_1\backslash A_2)\setminus A_3$$

ist in der Regel, d.h. dass die obige Klammersetzung tatsächlich notwendig ist. Was bedeuten die Aussagen (1) und (2) anschaulich? Denken Sie dabei, was passiert, wenn ein Stein ins Wasser fällt.

Lösung zu ÜbungÜbung 7

Wenn wir eine nicht-leere Menge A haben, dann gilt dass $A\backslash A = \varnothing$ und $A\backslash\varnothing = A$ ist. Daher ist

$$A\backslash(A\backslash A) = A\backslash\varnothing = A,$$

aber es gilt:

$$(A\backslash A)\backslash A = \varnothing\backslash A = \varnothing \neq A = A\backslash(A\backslash A).$$

(1) Es gilt, da

$$A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$$

ist:

$$\begin{aligned}
x \in A_1\backslash[A_2\backslash(A_3\backslash A_4)] &\Leftrightarrow (x \in A_1) \wedge (x \notin A_2)\backslash(A_3\backslash A_4) \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1) \wedge [[(x \in A_2) \wedge (x \in A_3\backslash A_4)] \vee (x \notin A_2)] \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1) \wedge [(x \in A_3\backslash A_4) \vee (x \notin A_2)] \\
&\Leftrightarrow [(x \in A_1) \wedge (x \in A_3\backslash A_4)] \vee [(x \in A_1) \wedge (x \notin A_2)] \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1\backslash A_2) \vee (x \in A_3\backslash A_4) \\
&\Leftrightarrow x \in (A_1\backslash A_2) \cup (A_3\backslash A_4).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung

$$A_1\backslash(A_2\backslash(A_3\backslash A_4)) = (A_1\backslash A_2) \cup (A_3\backslash A_4).$$

(2) Es gilt, da

$$A_5 \subseteq A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$$

ist:

$$\begin{aligned}
x \in A_1\backslash[A_2\backslash(A_3\backslash(A_4\backslash A_5))] &\Leftrightarrow (x \in A_1) \wedge (x \notin A_2\backslash(A_3\backslash(A_4\backslash A_5))) \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1) \wedge [[(x \in A_2) \wedge (x \in A_3\backslash(A_4\backslash A_5))] \vee (x \notin A_2)] \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1) \wedge [(x \in A_3\backslash(A_4\backslash A_5)) \vee (x \notin A_2)] \\
&\Leftrightarrow [(x \in A_1) \wedge (x \in A_3\backslash(A_4\backslash A_5))] \vee [(x \in A_1) \wedge (x \notin A_2)] \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1\backslash A_2) \vee (x \in A_3\backslash(A_4\backslash A_5)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1\backslash A_2) \vee [(x \in A_3) \wedge (x \notin A_4\backslash A_5)] \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1\backslash A_2) \vee [(x \in A_3) \wedge [(x \notin A_4) \vee [(x \in A_4) \wedge (x \in A_5)]]] \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1\backslash A_2) \vee [(x \in A_3) \wedge (x \notin A_4)] \vee [(x \in A_3)\,(x \in A_4) \wedge (x \in A_5)] \\
&\Leftrightarrow (x \in A_1\backslash A_2) \vee (x \in A_3\backslash A_4) \vee (x \in A_5) \\
&\Leftrightarrow x \in\in (A_1\backslash A_2) \cup (A_3\backslash A_4) \cup A_5.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung

$$A_1\backslash(A_2\backslash(A_3\backslash(A_4\backslash A_5))) = (A_1\backslash A_2) \cup (A_3\backslash A_4) \cup A_5.$$

Anschaulich bedeutet (1) gerade, dass die Wellenberge aufsummiert werden und (2) bedeutet anschaulich, dass die Wellentäler aufsummiert werden, wenn wir uns vorstellen, dass dies die 4 bzw. 5 Wasserwellen sind, wenn wir einen Stein ins Wasser werfen. $\square$