01.10.2019
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Mathematik Vorkurs 2019 für Mathematiker*innen

2. Übungsblatt

Übung 1 (Formulieren mit Quantoren)

Sei X die Menge der Teilnehmer*innen dieses Vorkurses und Y die Menge der Aufgaben, sowie $\mathcal{F}(x, y)$ die Aussage:

"*Der/ Die Teilnehmer*in x hat die Aufgabe y eigenständig gelöst.*"

Formulieren Sie damit die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned}
&\exists x \in X\colon\ (\forall y \in Y\colon \mathcal{F}(x, y))\,,\\
&\exists x \in X\colon\ (\exists y \in Y\colon \mathcal{F}(x, y))\,,\\
&\forall x \in X\colon\ (\exists y \in Y\colon \mathcal{F}(x, y))\,,\\
&\forall x \in X\colon\ (\forall y \in Y\colon \mathcal{F}(x, y))\,.
\end{aligned}$$

Lösung zu ÜbungÜbung 1

$\exists x \in X\colon\ (\forall y \in Y\colon \mathcal{F}(x, y))$: Es gibt eine/n Teilnehmer*in dieses Vorkurses, welche alle Aufgaben eigenständig gelöst hat.

$\exists x \in X\colon\ (\exists y \in Y\colon \mathcal{F}(x, y))\,,$: Mindestens ein/e Teilnehmer*in hat eine Aufgabe eigenständig gelöst.

$\forall x \in X\colon\ (\exists y \in Y\colon \mathcal{F}(x, y))\,,$: Alle Teilnehmer*innen haben mindestens eine Aufgabe eigenständig gelöst.

$\forall x \in X\colon\ (\forall y \in Y\colon \mathcal{F}(x, y))$: Alle Teilnehmer*innen haben alle Aufgaben eigenständig gelöst.

Übung 2 (Negation I)

Betrachten wir nun die beiden Aussagen

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{Z}\colon \exists y \in \mathbb{Z}\colon x + y = 0,\\
&\exists x \in \mathbb{Z}\colon \forall y \in \mathbb{Z}\colon x + y = 0.
\end{aligned}$$

Was bedeuten die beiden oberen Aussagen und welche davon ist wahr? Wie lauten die Negierungen?

Lösung zu ÜbungÜbung 2

Betrachten wir zuerst die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{Z}\colon \exists y \in \mathbb{Z}\colon x + y = 0.$$

Sei also $x \in \mathbb{Z}$. Dann setzen wir $y := -x$, so ist $y \in \mathbb{Z}$ mit

$$x + y = x - x = 0.$$

Damit haben wir nun gezeigt, dass die obere Aussage wahr ist. Damit ist die Negierung dieser Aussage

$$\neg\left(\forall x \in \mathbb{Z}\colon \exists y \in \mathbb{Z}\colon x + y = 0\right) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \left(\exists x \in \mathbb{Z}\colon \forall y \in \mathbb{Z}\colon x + y \neq 0\right)$$

falsch.
Schauen wir uns nun die andere Aussage

$$\exists x \in \mathbb{Z} \colon \forall y \in \mathbb{Z} \colon x + y = 0$$

an. Diese ist falsch, da ihre Negation wahr ist, diese lautet nämlich:

$$\neg\left(\exists x \in \mathbb{Z} \colon \forall y \in \mathbb{Z} \colon x + y = 0\right) \dashv\vDash \left(\forall x \in \mathbb{Z} \colon \exists y \in \mathbb{Z} \colon x + y \neq 0\right)$$

und zu $x \in \mathbb{Z}$ wähle $y := x^2 + x + 2$, so ist $y \in \mathbb{Z}$ mit

$$x + y = x + x^2 + x + 2 = x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 \geqslant 0 + 1 = 1 > 0,$$

d.h. insbesondere ist $x + y \neq 0$. Damit ist die Negation wahr und die eigentliche Aussage muss folglich falsch sein. □

Übung 3 (Entweder ... oder)

Es sei X eine Menge und $\mathcal{E}(\cdot)$, sowie $\mathcal{F}(\cdot)$ zwei Eigenschaften auf der Menge X, welche für alle $x \in X$ mathematische Aussagen $\mathcal{E}(x)$ bzw. $\mathcal{F}(x)$ definieren. Formulieren Sie mithilfe der Quantoren die Aussage

"*Jedes $x \in X$ erfüllt entweder $\mathcal{E}(x)$ oder $\mathcal{F}(x)$.*"

und bilden Sie auch die Negierung dieser Aussage.

Lösung zu ÜbungÜbung 3

Diese Aussage lässt sich folgendermaßen formalisieren:

$$\forall x \in X \colon \left[(\mathcal{E}(x) \vee \mathcal{F}(x)) \wedge \neg(\mathcal{E}(x) \wedge \mathcal{F}(x))\right].$$

Die Negation dieser Aussage lautet:

$$\begin{aligned}
&\neg\left[\forall x \in X \colon \left[(\mathcal{E}(x) \vee \mathcal{F}(x)) \wedge \neg(\mathcal{E}(x) \wedge \mathcal{F}(x))\right]\right] \\
&\dashv\vDash \left[\exists x \in X \colon \neg\left[(\mathcal{E}(x) \vee \mathcal{F}(x)) \wedge \neg(\mathcal{E}(x) \wedge \mathcal{F}(x))\right]\right] \\
&\dashv\vDash \left[\exists x \in X \colon \left[\neg(\mathcal{E}(x) \vee \mathcal{F}(x)) \vee (\mathcal{E}(x) \wedge \mathcal{F}(x))\right]\right] \\
&\dashv\vDash \left[\exists x \in X \colon \left[(\neg\mathcal{E}(x) \wedge \neg\mathcal{F}(x)) \vee (\mathcal{E}(x) \wedge \mathcal{F}(x))\right]\right].
\end{aligned}$$

□

Übung 4 (Formalisieren und Negieren)

Formalisieren und verneinen Sie die folgenden Aussagen. Geben Sie ferner eine umgangssprachliche Formulierung der Verneinung an.

(a) "*Wenn es regnet, werde ich naß, sofern ich draußen stehe, keinen Regenschirm dabei habe oder ich mich nirgends unterstellen kann.*"

(b) "*Jede Person im Raum sieht eine andere Person, welche ihn ansieht, aber nicht alle anderen.*"

Lösung zu ÜbungÜbung 4

(a) Wir definieren die Aussagen

$\mathcal{A}$: *Es regnet.*
$\mathcal{B}$: *Ich werde nass.*
$\mathcal{C}$: *Ich stehe draußen.*
$\mathcal{D}$: *Ich habe keinen Regenschirm.*
$\mathcal{E}$: *Ich kann mich nirgendwo unterstellen.*

Dann lässt sich die gegebene Aussage formalisieren als

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{B}.$$

Die Negation davon lautet:

$$\begin{aligned} &\neg\left[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{B}\right] \\ &\Dashv\vDash \neg\left[\neg\left(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E}\right) \vee \mathcal{B}\right] \\ &\Dashv\vDash \left[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E}) \wedge \neg\mathcal{B}\right] \\ &\Dashv\vDash \left[\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E} \wedge \neg\mathcal{B}\right]. \end{aligned}$$

Dies können wir umgangssprachlich ausdrücken durch:

"*Es regnet, ich stehe draußen, habe keinen Regenschirm dabei und kann mich nirgendwo unterstellen, aber werde (trotzdem) nicht nass.*"

(b) Wir definieren X als die Menge aller Personen im Raum, und für alle Paare $(x, y) \in X \times X$ bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(x, y)$ die Aussage "*Person x sieht y*". Dann lässt sich die gegebene Aussage formalisieren als

$$\forall x \in X \exists y \in X\colon\ \left(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y) \wedge (\exists z \in X\colon \neg\mathcal{S}(y, z))\right).$$

Die Verneinung lautet dann

$$\begin{aligned} &\neg\left[\forall x \in X \exists y \in X\colon\ \left(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y) \wedge (\exists z \in X\colon \neg\mathcal{S}(y, z))\right)\right] \\ &\Dashv\vDash \left[\exists x \in X \forall y \in X\colon \neg\left(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y) \wedge (\exists z \in X\colon \neg\mathcal{S}(y, z))\right)\right] \\ &\Dashv\vDash \left[\exists x \in X \forall y \in X\colon\ \left(\neg\mathcal{S}(x, y) \vee \neg\mathcal{S}(x, y) \vee \neg\left(\exists z \in X\colon \neg\mathcal{S}(y, z)\right)\right)\right] \\ &\Dashv\vDash \left[\exists x \in X \forall y \in X\colon\ \left(\neg\mathcal{S}(x, y) \vee \neg\mathcal{S}(x, y) \vee (\forall z \in X\colon \mathcal{S}(y, z))\right)\right]. \end{aligned}$$

Wir können nun noch für $(x, y) \in X \times X$ fest folgende Tautologien vornehmen:

$$\begin{aligned} &\neg\left[\forall x \in X \exists y \in X\colon\ \left(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y) \wedge (\exists z \in X\colon \neg\mathcal{S}(y, z))\right)\right] \\ &\Dashv\vDash \left[\exists x \in X \forall y \in X\colon\ \left(\neg\mathcal{S}(x, y) \vee \neg\mathcal{S}(x, y) \vee (\forall z \in X\colon \mathcal{S}(y, z))\right)\right] \\ &\Dashv\vDash \left[\exists x \in X \forall y \in X\colon\ \left(\neg\left(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y)\right) \vee (\forall z \in X\colon \mathcal{S}(y, z))\right)\right] \\ &\Dashv\vDash \left[\exists x \in X \forall y \in X\colon\ \left(\left(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(x, y)\right) \Rightarrow (\forall z \in X\colon \mathcal{S}(y, z))\right)\right]. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende umgangssprachliche Formulierung:

"*Es gibt eine Person in diesem Raum derart, dass alle anderen Personen in diesem Raum die ihn ansehen und auch von ihm angesehen werden schon alle anderen Personen in diesem Raum anschauen.*"

$\square$

Übung 5 (Erste Ungleichungen)

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an.

(a) $4x + 3 \leqslant 2\,(2x - 6)$.

(b) $4\,(1 - x) + 3\,(x + 2) < 8$.

(c) $\frac{x-1}{2} \geqslant \frac{1-x}{3}$.

(d) $3x - 1 \leqslant 2\,(x - 3) - (2 - x)$.

(e) $9x \geqslant \frac{3(6x-1)}{2}$.

(f) $-7x \geqslant \frac{3(x-1)}{2}$.

Lösung zu ÜbungÜbung 5

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} &4x + 3 \leqslant 2(x - 6) = 2x - 12 \\ \Leftrightarrow\ &2x + 3 \leqslant -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ 2x \leqslant -15 \\ &\Leftrightarrow\ x \leqslant -\frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösungsmenge

$$Ł := \{x \in \mathbb{R}\colon 4x+3 \leqslant 2(x-6)\} = \left\{x \in \mathbb{R}\colon x \leqslant -\frac{15}{2}\right\} = \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right].$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} & 4\,(1-x) + 3\,(x+2) < 8 \\ \Leftrightarrow\ & 4 - 4x + 3x + 6 < 8 \\ \Leftrightarrow\ & 10 - x < 8 \\ \Leftrightarrow\ & 2 - x < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 < x. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösungsmenge

$$Ł := \{x \in \mathbb{R}\colon 4\,(1-x) + 3\,(x+2) < 8\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x > 2\} = (2, \infty)\,.$$

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{2} \geqslant \frac{1-x}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x - 1 \geqslant \frac{2(1-x)}{3} \\ \Leftrightarrow\ & 3(x-1) \geqslant 2(1-x) \\ \Leftrightarrow\ & 3x - 3 \geqslant 2 - 2x \\ \Leftrightarrow\ & 5x - 3 \geqslant 2 \\ \Leftrightarrow\ & 5x \geqslant 5 \\ \Leftrightarrow\ & x \geqslant 1. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösungsmenge

$$Ł := \left\{x \in \mathbb{R}\colon \frac{x-1}{2} \geqslant \frac{1-x}{3}\right\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geqslant 1\} = [1, \infty)\,.$$

(d) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} & 3x - 1 \leqslant 2\,(x-3) - (2-x) \\ \Leftrightarrow\ & 3x - 1 \leqslant 2x - 6 - 2 + x \\ \Leftrightarrow\ & 3x - 1 \leqslant 3x - 8 \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leqslant -8 \\ \Leftrightarrow\ & 7 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösungsmenge

$$Ł := \{x \in \mathbb{R}\colon 3x - 1 \leqslant 2\,(x-3) - (2-x)\} = \{\} = \varnothing.$$

(e) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} & 9x \geqslant \frac{3\,(6x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 18x \geqslant 3(6x-1) \\ \Leftrightarrow\ & 18x \geqslant 18x - 3 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \geqslant -3 \\ \Leftrightarrow\ & 3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösungsmenge

$$Ł := \left\{x \in \mathbb{R}\colon 9x \geqslant \frac{3\,(6x-1)}{2}\right\} = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

(f) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} -7x &\geqslant \frac{3\,(x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow\ -14x &\geqslant 3(x-1) \\ \Leftrightarrow\ -14x &\geqslant 3x-3 \\ \Leftrightarrow\ 0 &\geqslant 17x-3 \\ \Leftrightarrow\ 3 &\geqslant 17x \\ \Leftrightarrow\ \frac{3}{17} &\geqslant x. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösungsmenge

$$Ł := \left\{ x \in \mathbb{R} \colon -7x \geqslant \frac{3\,(x-1)}{2} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon x \leqslant \frac{3}{17} \right\} = \left(-\infty, \frac{3}{17} \right].$$

□

Übung 6 (Beweisaufgabe)

(1) Beweisen Sie, dass für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < 0$ gilt: $ac > bc$.

(2) Zeigen Sie, dass der Schnitt von offenen Intervallen wieder ein Intervall ist.

(3) Zeigen Sie, dass für $a, b \in [0, \infty)$ die Äquivalenz

$$a < b \;\Leftrightarrow\; a^2 < b^2$$

gilt.

Lösung zu ÜbungÜbung 6

(1) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < 0$. Dann ist $-c > 0$ und wegen Satz 1.9.1(6) wissen wir, dass

$$a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$$

ist. Dies liefert uns nun:

$$-ac = a \cdot (-c) < b \cdot (-c) = -bc \;\Leftrightarrow\; ac < bc$$

und damit auch die Behauptung.
Wir zeigen kurz, was dazu noch nötig war: Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so gilt wegen $a + c, b + c \in \mathbb{R}$ und $a < b$:

$$a + c < b + c.$$

(Dies sehen wir auch, wenn wir uns den Zahlenstrahl aufmalen)
Ist nun $c > 0$, so folgt aus

$$(a-b)\,c < (b-b)\,c = 0 \cdot c = 0,$$

dass

$$\begin{aligned} ac - bc = (a-b)\,c &< 0 \\ \Leftrightarrow\ ac &< bc \end{aligned}$$

ist. □

(2) Seien $a, b, c, d, u, p, z, r \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $c < d$ und wir setzen die beiden offenen Intervalle

$$I := (a, b) \;\text{ und }\; J := (c, d)\,,$$

sowie die unendlichen Intervalle

$$U := (u, \infty)\,,\; P := (-\infty, p)\,,\; Z := (z, \infty) \;\text{ und }\; R := (-\infty, r)\,.$$

Wir unterscheiden die verschiedenen Fälle, wobei (abgesehen von Fall 1.) alle sehr ähnlich gehen.
Fall 1. Trivialen Fälle: Sei $\widetilde{I}$ ein beliebiges offenes (d.h. egal ob endlich, leer oder unendlich) Intervall, so gilt:

$$\begin{aligned} \widetilde{I} \cap \varnothing &= \varnothing, \\ \widetilde{I} \cap (-\infty, \infty) &= \widetilde{I} \cap \mathbb{R} = \widetilde{I}. \end{aligned}$$

Fall 2. Beides endliche Intervalle: Wir betrachten also die beiden Intervalle I und J. Es gilt:

$$\begin{aligned} I \cap J &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \text{ und } c < x < d\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \max\{a, c\} < x < \min\{b, d\}\} \\ &= (\max\{a, c\}\,,\ \min\{b, d\})\,. \end{aligned}$$

Fall 3. Eines endlich und das andere unendlich: Wir betrachten also die Intervalle I und U, P, dabei ist I das endliche Intervall. Es gilt:

$$\begin{aligned} I \cap U &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \text{ und } u < x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \max\{a, u\} < x < b\} \\ &= (\max\{a, u\}\,,\ b)\,, \\ I \cap P &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \text{ und } x < p\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \min\{b, p\}\} \\ &= (a,\ \min\{b, p\})\,. \end{aligned}$$

Fall 2. Beides unendliche Intervalle: Wir betrachten also die Intervalle U, P, R und Z. Es gilt für $u < p$:

$$\begin{aligned} U \cap P &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > u \text{ und } x < p\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid u < x < p\} \\ &= (u, p) \end{aligned}$$

Es gilt für $u \geqslant p$:

$$\begin{aligned} U \cap P &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > u \text{ und } x < p\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid u < x < p\} \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned} U \cap Z &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > u \text{ und } x > z\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \max\{u, z\} < x\} \\ &= (\max\{u, z\}\,,\ \infty)\,, \\ P \cap R &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < p \text{ und } x < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \min\{p, r\} > x\} \\ &= (-\infty,\ \min\{p, r\})\,. \end{aligned}$$

$\square$

(e) Seien $a, b \in [0, \infty)$.
"$\Rightarrow$": Sei zuerst $a < b$, so liefert uns der Satz 1.9.1:

$$a^2 = a \cdot a < ab < b^2.$$

"$\Leftarrow$": Es gelte $a \geqslant b$. So liefert uns erneut der Satz 1.9.1:

$$a^2 = a \cdot a \geqslant ab \geqslant b^2.$$

Per Kontraposition erhalten wir also, dass aus $a^2 < b^2$ auch schon $a < b$ folgt. $\square$