

# Mathematik Vorkurs 2019 für Mathematiker\*innen

## 3. Übungsblatt

### Übung 1 (Injektivität, Surjektivität und Bijektivität)

Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Umkehrfunktion. Sollte die Funktion nur injektiv sein, bestimmen Sie eine bijektive Korestriktion dieser Funktion.

(a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 - 3x.$

(b)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}.$

(c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

### Übung 2 (Selbstinverse Funktion)

Wir definieren die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 - x, & \text{falls } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prüfen Sie, ob die Funktion bijektiv ist und bestimmen Sie in diesem Falle die Umkehrfunktion.

### Übung 3 (Verkettung mit injektiven, surjektiven und bijektiven Funktionen)

Seien  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  zwei Funktionen und  $h = g \circ f: A \rightarrow C$  deren Verkettung. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(1) Sind die beiden Funktionen,  $f$  und  $g$ , injektiv, so ist auch die Funktion  $h$  injektiv.

(2) Ist die Restriktion  $g|_{f(A)}: f(A) \rightarrow C$  surjektiv, dann ist auch die Funktion  $h$  surjektiv.

(3) Sind die beiden Funktionen,  $f$  und  $g$ , bijektiv, so ist auch die Funktion  $h$  bijektiv mit der Umkehrfunktion

$$h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

### Übung 4 (Verkettung zur Identität)

Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Funktion mit  $A \neq \emptyset$ . Zeigen Sie die folgenden Kriterien:

(1) Die Funktion  $f$  ist injektiv genau, dann wenn es eine Funktion  $g: B \rightarrow A$  gibt mit der Eigenschaft

$$g \circ f = \text{Id}_A.$$

(2) Die Funktion  $f$  ist surjektiv genau, dann wenn es eine Funktion  $g: B \rightarrow A$  gibt mit der Eigenschaft

$$f \circ g = \text{Id}_B.$$

## Übung 5 (Bruchrechenaufgaben)

Berechnen Sie die folgenden Brüche.

$$(1) \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{5} : \frac{3}{2}.$$

$$(2) -\frac{5}{9} + \left(-\frac{3}{7} + \frac{2}{9}\right) - \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{9} - \frac{2}{7}\right).$$

$$(3) -\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{7} + \frac{2}{9}\right) - \frac{4}{7} + \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{7}\right).$$

$$(4) -\left(-\frac{4}{3} + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{5}\right).$$

$$(5) \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}.$$

$$(6) \frac{5}{6} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{7}{11}.$$

$$(7) \frac{\frac{9}{2} \cdot \frac{7}{12}}{\frac{6}{7}}.$$

$$(8) \frac{\frac{1}{11} : \frac{3}{4}}{\frac{12}{11} : \frac{3}{4}}.$$