02.10.2019
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Mathematik Vorkurs 2019 für Mathematiker*innen

3. Übungsblatt

Übung 1 (Injektivität, Surjektivität und Bijektivität)

Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Umkehrfunktion. Sollte die Funktion nur injektiv sein, bestimmen Sie eine bijektive Korestriktion dieser Funktion.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2 - 3x$.

(b) $f\colon \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Lösung zu Übung 1

(a) Es gilt für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\begin{aligned} 2 - 3x_1 = f(x_1) &= f(x_2) = 2 - 3x_2 \\ \Leftrightarrow\ -3x_1 &= -3x_2 \\ \Leftrightarrow\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

d.h. die Funktion f ist injektiv. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} y &= f(x) = 2 - 3x \\ \Leftrightarrow\ y + 3x &= 2 \\ \Leftrightarrow\ 3x &= 2 - y \\ \Leftrightarrow\ x &= \frac{1}{3}(2-y) = \frac{2-y}{3}, \end{aligned}$$

d.h. im Punkt $x = \frac{2-y}{3} \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = y$. Also ist die Funktion f surjektiv. Damit ist die Funktion f bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2-x}{3}.$$

(b) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+1+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Es gilt für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{x_1 - 1} = f(x_1) &= f(x_2) = 1 + \frac{2}{x_2 - 1} \\ \Leftrightarrow\ \frac{2}{x_1 - 1} &= \frac{2}{x_2 - 1} \\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x_1 - 1} &= \frac{1}{x_2 - 1} \\ \Leftrightarrow\ x_1 - 1 &= x_2 - 1 \\ \Leftrightarrow\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

d.h. die Funktion f ist injektiv. Weiter ist für $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$:

$$\begin{aligned} 1 = f(x) &= \frac{x+1}{x-1} \\ \Leftrightarrow\ x-1 &= x+1 \\ \Leftrightarrow\ -1 &= 1 \\ \Leftrightarrow\ 0 &= 2, \end{aligned}$$

wobe die letzte Aussage falsch ist, also kann wegen $1 \in \mathbb{R}$ die Funktion f nicht surjektiv sein. Aber für $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \frac{x+1}{x-1} \\ \Leftrightarrow\ yx - y = y(x-1) &= x+1 \\ \Leftrightarrow\ yx - y - x = x(y-1) - y &= 1 \\ \Leftrightarrow\ x(y-1) &= y+1 \\ \Leftrightarrow\ x &= \frac{y+1}{y-1}, \end{aligned}$$

d.h. setzen wir $x := \frac{y+1}{y-1}$, so ist $f(x) = y$ und damit ist die Korestriktion

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\},\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

surjektiv, d.h. die Funktion $\tilde{f}$ ist bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$\tilde{f}^{-1}\colon \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\},\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}.$$

Bemerkung: Die Funktion $\tilde{f}$ ist somit gleich ihrer Umkehrfunktion, dies nennen wir auch selbstinvers.
(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{(-1)^2-1}{(-1)^2+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0, \\ f(1) &= \frac{1^2-1}{1^1+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 = f(-1), \end{aligned}$$

d.h. die Funktion f ist nicht injektiv. Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1} \\ &\leqslant 1 - 0 = 1, \end{aligned}$$

d.h. es gibt z.B. kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2$ und damit ist die Funktion f nicht surjektiv. Sie kann damit auch nicht bijektiv sein. □

Übung 2 (Selbstinverse Funktion)

Wir definieren die Funktion

$$f\colon [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} \\ 1-x, & \text{falls } x \in [0,1| \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prüfen Sie, ob die Funktion bijektiv ist und bestimmen Sie in diesem Falle die Umkehrfunktion.

Lösung zu Übung 2

f surjektiv: Sei $y \in [0,1]$.
Fall 1. $y \notin \mathbb{Q}$. Dann setzen wir $x := y \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$ und haben $f(x) = x = y$.
Fall 2. $y \in \mathbb{Q}$. Dann setzen wir $x := 1 - y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 1 - x = 1 - (1-y) = 1 - 1 + y = y$.
Zusammen folgt nun, dass die Funktion f surjektiv ist.
f injektiv: Wir zeigen hierfür, dass $f(f(x)) = x$ ist für alle $x \in [0,1]$. Sei dazu $x \in [0,1]$.
Fall 1. $x \notin \mathbb{Q}$. Setze $y := f(x) = x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$ und wir haben $f(f(x)) = f(y) = f(x) = x$.

Fall 2. $x \in \mathbb{Q}$. Setze $y := f(x) = 1 - x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und wir haben $f(f(x)) = f(y) = 1 - y = 1 - (1 - x) = 1 - 1 + x = x$. Demnach haben wir $f(f(x)) = x$ für alle $x \in [0,1]$. Seien nun $x_1, x_2 \in [0,1]$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, so haben wir

$$x_1 = f(f(x_1)) = f((x_2)) = x_2,$$

d.h. die Funktion f ist injektiv.
Damit ist die Funktion f auch bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$f^{-1} \colon [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto f(x),$$

d.h. $f^{-1} = f$. □

Übung 3 (Verkettung mit injektiven, surjektiven und bijektiven Funktionen)

Seien $f \colon A \to B$ und $g \colon B \to C$ zwei Funktionen und $h = g \circ f \colon A \to C$ deren Verkettung. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(1) Sind die beiden Funktionen, f und g, injektiv, so ist auch die Funktion h injektiv.

(2) Ist die Restriktion $g|_{f(A)} \colon f(A) \to C$ surjektiv, dann ist auch die Funktion h surjektiv.

(3) Sind die beiden Funktionen, f und g, bijektiv, so ist auch die Funktion h bijektiv mit der Umkehrfunktion

$$h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Lösung zu Übung 3

(1) Seien die beiden Funktionen f und g injektiv. Seien nun $x_1, x_2 \in A$ so, dass $h(x_1) = h(x_2)$ und setze $y_1 := f(x_1) \in B$, sowie $y_2 := f(x_2) \in B$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g(y_1) = g(f(x_1)) = h(x_1) = h(x_2) = g(f(x_2)) = g(y_2) \\ \Rightarrow\ f(x_1) = y_1 = y_2 = f(x_2) \\ \Rightarrow\ x_1 = x_2, \end{aligned}$$

da die Funktionen g und f injektiv sind. Damit ist die Funktion h auch injektiv. □
(2) Sei $c \in C$. Dann existiert wegen der Surjektivität der Einschränkung $g|_{f(A)}$ ein $y \in f(A)$ mit $g|_{f(A)}(y) = c$. Da $y \in f(A)$ ist, existiert ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Damit haben wir nun:

$$h(x) = g(f(x)) = g(y) = g|_{f(A)}(y) = c,$$

d.h. die Funktion h ist surjektiv. □
(3) Seien nun die beiden Funktionen f, g bijektiv, somit sind diese injektiv und surjektiv. Aus (1) folgt nun, dass die Funktion h injektiv ist und aus (2), dass die Funktion h surjektiv ist, da hier $f(A) = B$ gilt. Also ist die Funktion h bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$h^{-1} \colon C \to A,\ x \mapsto f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right).$$

□

Übung 4 (Verkettung zur Identität)

Sei $f \colon A \to B$ eine Funktion mit $A \neq \emptyset$. Zeigen Sie die folgenden Kriterien:

(1) Die Funktion f ist injektiv genau, dann wenn es eine Funktion $g \colon B \to A$ gibt mit der Eigenschaft

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A.$$

(2) Die Funktion f ist surjektiv genau, dann wenn es eine Funktion $g \colon B \to A$ gibt mit der Eigenschaft

$$f \circ g = \mathrm{Id}_B.$$

Lösung zu Übung 4

(1) "$\Rightarrow$": Sei erst die Funktion f injektiv. Dann ist die Korestriktion

$$\widetilde{f}\colon A \to f(A),\ x \mapsto f(x)$$

bijektiv mit Umkehrabbildung $\widetilde{f}^{-1}$. Weiter sei $a_0 \in A$ beliebig (da $A \neq \varnothing$ ist). Wir setzen die Funktion

$$g\colon B \to A,\ x \mapsto \begin{cases} \widetilde{f}^{-1}(x), & \text{falls } x \in f(A) \\ a_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt nun für alle $x \in A$, da $f(x) \in f(A)$ ist:

$$g(f(x)) = \widetilde{f}^{-1}(f(x)) = \widetilde{f}^{-1}\left(\widetilde{f}(x)\right) = x.$$

Also ist $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.
"$\Leftarrow$": Sei nun $g\colon B \to A$ so, dass $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ ist. Sind nun $x_1, x_2 \in A$ derart, dass $f(x_1) = f(x_2)$ ist, erhalten wir

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2,$$

d.h. die Funktion f ist injektiv. $\square$
(2) "$\Rightarrow$": Sei die Funktion f surjektiv. Zu jedem $b \in B$ können wir nun ein $x_b \in A$ wählen mit $f(x_b) = b$. Setze die Funktion:

$$g\colon B \to A,\ b \mapsto x_b.$$

Dann gilt für alle $b \in B$:

$$f(g(b)) = f(x_b) = b,$$

also ist $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.
"$\Leftarrow$": Sei nun eine Funktion $g\colon B \to A$ so gegeben, dass $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ ist und weiter sei $b \in B$. Wir setzen $x := g(b) \in A$. Damit ist:

$$f(x) = f(g(b)) = b,$$

d.h. die Funktion f ist surjektiv. $\square$

Übung 5 (Bruchrechenaufgaben)

Berechnen Sie die folgenden Brüche.

(1) $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{5} : \frac{3}{2}$.

(2) $-\frac{5}{9} + \left(-\frac{3}{7} + \frac{2}{9}\right) - \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{9} - \frac{2}{7}\right)$.

(3) $-\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{7} + \frac{2}{9}\right) - \frac{4}{7} + \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{7}\right)$.

(4) $-\left(-\frac{4}{3} + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{5}\right)$.

(5) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$.

(6) $\frac{5}{6} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{7}{11}$.

(7) $\frac{\frac{9}{7} \cdot \frac{7}{12}}{\frac{6}{7}}$.

(8) $\frac{\frac{1}{11}}{\frac{12}{11} : \frac{3}{4}}$.

Lösung zu Übung 5

(1) $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{5} : \frac{3}{2} = \frac{57}{10}$.

(2) $-\frac{5}{9} + \left(-\frac{3}{7} + \frac{2}{9}\right) - \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{9} - \frac{2}{7}\right) = -\frac{1}{63}$.

(3) $-\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{7} + \frac{2}{9}\right) - \frac{4}{7} + \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{7}\right) = -\frac{5}{3}$.

(4) $-\left(-\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{15}$.

(5) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$.

(6) $\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{15}\cdot\frac{7}{11}=\frac{14}{33}$.

(7) $\frac{\frac{9}{7}\cdot\frac{7}{12}}{\frac{6}{7}}=\frac{7}{12}$.

(8) $\frac{\frac{1}{11}}{\frac{12}{11}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{1}{16}$.