04.10.2019
M.Sc. Michael Ullmann

Mathematatik Vorkurs 2019 für Mathematiker*innen

4. Übungsblatt

Übung 1 (Rationalmachen von Nennern)

Machen Sie die Nenner der folgenden Brüche rational.

(1) $\frac{ab}{c\sqrt{b}}$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0 \neq c$.

(2) $\frac{3+2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}}$.

(3) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$.

(4) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

(5) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

(6) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

Lösung zu ÜbungÜbung 1

(1) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b > 0 \neq c$ gilt:

$$\frac{ab}{c\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{c}.$$

(2) $\frac{3+2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}} = 17 + 12\sqrt{2}$.

(3) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}} = \frac{18+5\sqrt{10}}{2}$.

(4) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

(5) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = 5 + 2\sqrt{6}$.

(6) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Übung 2 (Quadratische Ungleichung)

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$$

gilt, mit ">" falls a und b beide ungleich null sind.

Lösung zu ÜbungÜbung 2

Es gilt:

$$a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{a^2+b^2}{2} \geqslant 0.$$

Weiter gilt:

$$0 = a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{1}{2}(a-b)^2 \;\Rightarrow\; a = b$$

und

$$0 = a^2 - ab + b^2 = a^2 - a^2 + a^2 = a^2 \;\Leftrightarrow\; a = 0.$$

Also ist auch $b = a = 0$. □

Übung 3 (Ungleichung)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 10.$$

Lösung zu ÜbungÜbung 3

Für $x = 0$ ist die vorliegende Ungleichung nicht definiert. Für $x < 0$ gilt:

$$x + \frac{1}{x} < 0 + 0 = 0 < 10.$$

D.h. falls eine Lösung x existiert, muss $x > 0$ sein. Damit gilt für $x > 0$:

$$\begin{aligned} & x + \frac{1}{x} \geqslant 10 \\ \Leftrightarrow\; & x^2 + 1 \geqslant 10x \\ \Leftrightarrow\; & x^2 - 10x + 1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Wir bestimmen erst die Lösung(en) $x \in \mathbb{R}$ der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 10x + 1 = 0.$$

Laut der Mitternachtsformel gilt:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

Weiter ist

$$0^2 - 10 \cdot 0 + 1 = 1 > 0 \text{ und } 12^2 - 10 \cdot 12 + 1 = 144 - 120 + 1 = 25 > 0,$$

d.h. für die Lösungsmenge:

$$Ł := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} \geqslant 10 \right\} = \left(0,\; 5 - 2\sqrt{6}\right) \cup \left(5 + 2\sqrt{6},\; \infty\right).$$

Übung 4 (Wurzelgleichungen)

Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen:

(1) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 1 = 0.$

(2) $x + \sqrt{x^2 - 25} = 25.$

(3) $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+8}.$

(4) $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x+7}} = 4.$

Lösung zu ÜbungÜbung 4

(1) Wurzeln sind nicht-negativ, daher kann kein $x \in \mathbb{R}$ diese Gleichung erfüllen.
(2) Es gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 25} &= 25 \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 25} &= 25 - x \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 25 &= (x-25)^2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 25 &= x^2 - 50x + 625 \\ \Leftrightarrow \quad 50x &= 600 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 13. \end{aligned}$$

Eine Probe liefert, dass $x = 13$ die Lösung der Wurzelgleichung (2) ist.
(3) Es gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{x+3} &= \sqrt{x+8} \\ \Rightarrow \quad x + x + 3 + 2\sqrt{x\,(x+3)} &= x + 8 \\ \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x(x+3)} &= -x + 8 \\ \Rightarrow \quad 4\left(x^2 + 3x\right) &= x^2 - 10x + 25 \\ \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 22x - 25 &= 0. \end{aligned}$$

Laut Mitternachtsformel gilt:

$$x_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + 300}}{6} = \frac{-22 \pm \sqrt{784}}{6} = \frac{-22 \pm 28}{6}.$$

Also ist $x_1 = -\frac{25}{3}$ und $x_2 = 1$. Die Probe ergibt, dass x_1 keine Lösung und $x_2 = 1$ eine Lösung der Wurzelgleichung ist.
(4) Es gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{x + 2 + \sqrt{2x+7}} &= 4 \\ \Rightarrow \quad x + 2 + \sqrt{2x+7} &= 16 \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{2x+7} &= 14 - x \\ \Rightarrow \quad 2x + 7 &= (14 - x) \\ \Leftrightarrow \quad 2x + 7 &= 196 - 28x + x^2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 30x + 189 &= 0. \end{aligned}$$

Laut Mitternachtsformel gilt:

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 756}}{2} = \frac{30 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{30 \pm 12}{2} = 15 \pm 6.$$

Die Probe ergibt, dass $x_2 = 21$ keine Lösung und $x_1 = 9$ eine Lösung der Wurzelgleichung ist.

Übung 5 (Betragsungleichungen)

Lösen Sie die Betragsungleichungen, und geben Sie die Lösungsmenge an. Bestimmen Sie, wo relevant, zunächst die Definitionsmenge der Ungleichung.

(1) $|2x - 3| < x$.

(2) $|x - 2| < 3$.

(3) $\left|x^2 - 4x\right| > 0$.

(4) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leqslant 1$.

(5) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geqslant 1$.

(6) $|x + 2| > |x - 5|$.

Lösung zu ÜbungÜbung 5

(1) <u>1. Fall</u>: $2x-3 \geqslant 0$, d.h. $x \geqslant \frac{3}{2}$.
Dann gilt:

$$|2x-3| < x \;\Leftrightarrow\; 2x-3 < x \;\Leftrightarrow\; x < 3.$$

<u>2. Fall</u>: $2x-3 < 0$, d.h. $x < \frac{3}{2}$.
Dann gilt:

$$|2x-3| < x \;\Leftrightarrow\; -2x+3 < x \;\Leftrightarrow\; -3x < 3 \;\Leftrightarrow\; x > 1.$$

Damit erhalten wir als Lösungsmenge

$$Ł := \{x \in \mathbb{R} \colon\; |2x-3| < x\} = \left[\frac{3}{2}, 3\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) = (1, 2).$$

(2) <u>1. Fall</u>: $x-2 \geqslant 0$, d.h. $x \geqslant 2$.
Dann gilt:

$$|x-2| < 3 \;\Leftrightarrow\; x-2 < 3 \;\Leftrightarrow\; x < 5.$$

<u>2. Fall</u>: $x-2 < 0$, d.h. $x < 2$.
Dann gilt:

$$|x-2| < 3 \;\Leftrightarrow\; -x+2 < x \;\Leftrightarrow\; -x < 1 \;\Leftrightarrow\; x > -1.$$

Damit erhalten wir als Lösungsmenge

$$Ł := \{x \in \mathbb{R} \colon\; |x-2| < 3\} = [2, 5) \cup (-1, 2) = (-1, 5).$$

(3) Es gilt:

$$0 \leqslant \left|x^2 - 4x\right| = |x(x-4)| \;\text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Weiter ist:

$$0 = \left|x^2 - 4x\right| = |x(x-4)| \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } x = 4.$$

Damit erhalten wir als Lösungsmenge

$$Ł := \left\{x \in \mathbb{R} \colon\; \left|x^2 - 4x\right| > 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}.$$

(4) $x \leqslant 1$, aber $x \neq -4$, daher:

$$Ł := \left\{x \in \mathbb{R} \colon \frac{2x+3}{|x+4|} \leqslant 1\right\} = (-\infty, 1] \setminus \{-4\}.$$

(5) Damit erhalten wir als Lösungsmenge

$$Ł := \left\{x \in \mathbb{R} \colon \frac{|x-1|}{2x+2} \geqslant 1\right\} = \left(-1, -\frac{1}{3}\right].$$

(6) Damit erhalten wir als Lösungsmenge

$$Ł := \{x \in \mathbb{R} \colon\; |x+2| > |x-5|\} = \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$