Skript zum Vorkurs Mathematik 2019 für Mathematiker*innen

gehalten von

Michael Ullmann

30.09.2019

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Dieses erste Kapitel soll einige Grundlagen aufbereiten wie z.B. was verstehen wir unter einer mathematischen Aussage, einer Menge einem Element, Quantoren, Ordnungsrelationen und den womöglich bekannten Mengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bis hin zu den reellen Zahlen R.

1.1 Was ist eine mathematische Aussage?

Wenn wir uns über die Mathematik verständigen wollen, dann benötigen wir zuerst eine gemeinsame Sprache. Daher ist es unumgänglich zu verstehen, was eine mathematische Aussage ist. Im Anschluss daran können wir uns damit auseinandersetzen, wie wir die Aussagen miteinander in Beziehung bringen. Dies spielt eine entscheidende Rolle beim Bilde und Verstehen von mathematischen Beweisen wie wir an späterer Stelle sehen werden.

Definition 1.1.1 (Mathematische Aussage)**.** *Eine **Aussage** im mathematischen Sinne ist eine Feststellung deren Wahrheitsgehalt stets mit "wahr"(w) oder "falsch"(f) angegeben werden kann.*

Einige erste Beispiele für mathematische Aussagen sind nach der obigen Definition 1.1.1:

- "*Dienstag ist ein Wochentag*"(wahr)
- "*Dienstag ist Montag*"(falsch)
- "2 *ist eine gerade Zahl*"(wahr)
- "$2 = 1$"(falsch)

Dagegen sind folgende Beispiele keine mathematischen Aussagen:

- "*Ich denke, also bin ich.*"(nicht mit "*wahr*" oder mit "*falsch*" beantwortbar)
- "$x^2 + 2x + 1$"(Dies ist nur ein Term, das hat keine Aussage)
- "$x + 1 = 0$"(Dies kann "*wahr*" oder "*falsch*" sein, je nachdem, ob $x = -1$ ist, oder nicht)

Notation: Wir werden für den Rest des Skriptes mit $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, usw. stets mathematische Aussagen meinen.

1.2 Logische Verknüpfungen zwischen Aussagen

Wir lernen nun fünf **logische Verknüpfungen** zwischen mathematischen Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kennen. Jeder dieser Verknüpfungen bildet damit wieder eine mathematische Aussage.

Definition 1.2.1 (Logische Verknüpfungen von mathematischen Aussagen)**.** *Wir benennen die **logischen Verknüpfungen***

Bezeichnung	*Symbol*	*Bedeutung der Verknüpfung*
1. ***Negation***	$\neg\mathcal{A}$	*nicht* $\mathcal{A}$
2. ***Konjunktion*** *("und")*	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$
3. ***Disjunktion*** *("oder")*	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ *oder* $\mathcal{B}$
4. ***Implikation*** *("Folgerung")*	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	*aus* $\mathcal{A}$ *folgt* $\mathcal{B}$
5. ***Äquivalenz*** *("genau dann, wenn")*	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *sind äquivalent, d.h. aus* $\mathcal{A}$ *folgt* $\mathcal{B}$ *und aus* $\mathcal{B}$ *folgt* $\mathcal{A}$*.*

*Diese sind definiert über die folgende **Wahrheitstafel**:*

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bemerkung:

(1) Die logische Verknüpfung "*oder*ïst nicht-ausschließend (wie wir anhand der obigen Wahrheitstafel in Definition 1.2.1 sehen können), d.h. es ist nicht zu verwechseln mit "*entweder ... oder*".

(2) Ist die mathematische Aussage $\mathcal{A}$ falsch, so ist die Implikation/ Folgerung $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ stets wahr, unabhängig davon, ob die Aussage $\mathcal{B}$ wahr oder falsch ist. Anders gesagt, aus etwas Falschem können wir alles folgern, wie z.B.
$$0 \geqslant 1 \;\Rightarrow\; 2 = 3.$$

(3) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei mathematische Aussagen so, dass $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ gelte (d.h. wahr ist), dann nennen wir $\mathcal{A}$ die **hinreichende Bedingung (für** $\mathcal{B}$**)** und $\mathcal{B}$ die **notwendige Bedingung (für** $\mathcal{A}$**)**.

(4) Für jede mathematische Aussage $\mathcal{A}$ ist die Aussage $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ stets falsch und die Aussage $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ stets wahr wie wir leicht an der Wahrheitstabelle ablesen können:

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$
w	f	f	w
f	w	f	w

Es kann auch der Fall eintreten, dass zwei zusammengesetzte mathematische Aussagen dasselbe beschreiben, darum handelt die nachfolgende Definition:

Definition 1.2.2 (Tautologische Äquivalenz)**.** *Wir nennen zwei mathematische Aussagen* $\mathcal{C}$ *und* $\mathcal{D}$ ***tautologisch äquivalent****, wenn beide die gleiche Wahrheitstafel besitzen. In diesem Fall schreiben wir auch*
$$\mathcal{C} \mathrel{=\!\!|\!\models} \mathcal{D}.$$

Einige **Beispiele** für Tautologien sind:

Beispiel 1.2.3. *(1)* $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$*,*

(2) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ *(Kontraposition),*

(3) $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \mathrel{=\!\!|\!\models} ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$*.*

Das Beispiel (1) wird uns dabei noch beim sogenannten **Widerspruchsbeweis** begegnen, da diese Tautologie das Herzstück dieser Beweisart sein wird.

Satz 1.2.4 (Rechengesetze für die logischen Verknüpfungen). *Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ drei mathematische Aussagen, so gelten die folgenden Rechengesetze*

(1) ***Kommutativität:*** $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ *und* $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$.

(2) ***Assoziativität:*** $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ *und* $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$.

(3) ***Distributivgesetz:*** $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ *und* $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$.

(4) ***Negation:***

$$\begin{aligned} \neg\neg\mathcal{A} := \neg(\neg\mathcal{A}) &\mathrel{=\!\!|\!\!\models} \mathcal{A}, \\ \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) &\mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}), \\ \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) &\mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen dies über die Wahrheitstabelle, zuerst die Punkte (1) und (4)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{A}$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	$\neg(\neg\mathcal{A})$
w	w	f	f	w	w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	f	w	w	w	w	f	f	w
f	w	w	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f	w	w	w	w	f

□

Bemerkung: Die Schreibweise := bedeutet, dass wir die linke Seite vom Doppelpunkt durch das definieren, was auf der rechten Seite vom Gleichheitszeichen steht. In unserem Fall schreiben wir anstatt das umständliche $\neg(\neg\mathcal{A})$ einfach das intuitive $\neg\neg\mathcal{A}$. Die andere Möglichkeit gibt es auch, also dass wir die rechte Seite über die linke definieren, hier nutzen wir die kanonische Schreibweise =:.

Wir kommen auf die Verneinung/ Negation im Verlauf des Skriptes nochmal darauf zurück, sobald wir Mengen und Quantoren eingeführt haben.

Auf Grund der Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$ schreiben wir anstatt $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$ bzw. anstatt $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$ einfach $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$, d.h. wir können auf eine Klammersetzung in diesen Fällen verzichten.

1.3 Mathematische Beweisprinzipien

In diesem Unterabschnitt lernen wir die grundlegenden logischen Beweisprinzipien kennen, die uns im Laufe des Mathematikstudiums immer wieder begegnen werden. In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei mathematische Aussagen. Ziel soll es stets sein, dass wir unter der Voraussetzung $\mathcal{A}$ die Aussage $\mathcal{B}$ folgern, d.h. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Anders ausgedrückt:

Voraussetzung: $\mathcal{A}$.
Behauptung: $\mathcal{B}$.

Unsere Mittel, die wir verwenden können, sind

- Die mathematische Aussage $\mathcal{A}$.
- Axiome/ Regeln und bereits bewiesene Aussagen, insbesondere geltende Rechenregeln.
- Die logischen Verknüpfungen aus Definition 1.2.1.

Wir unterscheiden die folgenden drei Beweistechniken:

(1) **Der direkte Beweis**: Hierbei folgern wir aus der Aussage $\mathcal{A}$ auf direktem Wege unter der Benutzung von zuvor bewiesenen Rechenregeln und logischen Folgerungen die mathematische Aussage $\mathcal{B}$, eventuell über Zwischenergebnisse/ andere mathematische Aussagen $\mathcal{C}$. Schematisch sehe das z.B. wie folgt aus

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}.$$

(2) **Die Kontraposition**: Wir setzen $\neg\mathcal{B}$ voraus und folgern daraus wie in (1) die Aussage $\neg\mathcal{A}$, eventuell über Zwischenergebnisse/ andere mathematische Aussagen $\mathcal{D}$. Schematisch sehe das z.B. wie folgt aus

$$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D} \Rightarrow \neg\mathcal{A}.$$

Aus dem Beispiel 1.2.3(?) wissen wir, dass

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$$

ist, d.h. wir haben dadurch, dass wir soeben $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ bewiesen haben gezeigt wegen der Tautologie, dass automatisch auch $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ gelten muss.

(3) **Der Widerspruchsbeweis**: Wir setzen die Aussage $\mathcal{A}$ voraus und nehmen an, dass die Aussage $\neg\mathcal{B}$ gelte, also insgesamt ist unsere Voraussetzung die Aussage $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$. Nun folgern wir für eine weitere mathematische Aussage $\mathcal{C}$, dass $\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}$ gelten müsste. Wie wir bereits im vorherigen Abschnitt bemerkt haben, ist die Aussage $\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}$ stets falsch, d.h. die Aussage $\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C})$ ist stets wahr. Also haben wir aus der Aussage $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ die Aussage $\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}$ gefolgert, mittels tautologischer Äquivalenz aus dem Beispiel 1.2.3(?) erhalten wir nun, dass wir aus der Aussage $\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C})$ die gesuchte Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ folgern können. Denn schematisch bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
[(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C})] &\mathrel{=\!\!|\!\models} [\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}) \Rightarrow \neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})] \\
&\mathrel{=\!\!|\!\models} [\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A} \vee \neg\neg\mathcal{B})] \\
&\mathrel{=\!\!|\!\models} [\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})] \\
&\mathrel{=\!\!|\!\models} [\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})],
\end{aligned}$$

wobei wir die Beispiele 1.2.3(?) ausgenutzt haben.

Es gibt noch weitere Beweistechniken wie z.B. den Beweis per **vollständiger Induktion**, dieser wird aber in den Grundvorlesungen behandelt und findet sich daher der Vollständigkeit wegen nur im Anhang wieder, siehe ??. In den nächsten Abschnitten werden wir diese drei oben genannten Beweisprinzipien benutzen um unsere formulierten Sätze zu untermauern.

1.4 Mengen

Im Grunde haben wir alle ein natürliches Verständnis für den Begriff der "*Menge*", auch Georg Cantor (1845 - 1918), einer der Begründer der Mengenlehre, hatte eine sehr spezielle Vorstellung davon, was nun eine Menge ist, so heißt es in einer Anekdote:

"Dedekind äußerte, hinsichtlich des Begriffes der Menge: Er stelle sich eine Menge vor wie einen geschlossenen Sack, der bestimmte Dinge enthalte, die man aber nicht sähe, und von denen man nichts wisse, außer daß sie vorhanden und bestimmt seien. Einige Zeit später gab Cantor seine Vorstellung einer Menge zu erkennen: Er richtete seine kolossale Figur hoch auf, beschrieb mit erhobenen Arm eine großartige Geste und sagte mit einem ins Unbestimmte gerichteten Blick: "Eine Menge stelle ich mir vor wie einen Abgrund.""

(aus Dedekind 1930 - 1932, Gesammelte Werke, Band III, S.449)

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916) war ebenfalls ein bedeutender Mathematiker, der Name wird besonders in der dem Bereich der Algebra öfters einmal auftauchen.

Was ist nun mathematisch gesehen eine Menge? Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten, für uns genügt aber der "naive"Mengenbegriff nach Cantor:

Definition 1.4.1 ("Naiver"Mengenbegriff nach Cantor)**.** *Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

Warum dieser Begriff mit "*naiv*"bezeichnet wird, liegt daran, dass anschließend viele Paradoxien gefunden wurden, die sich auf diesen Mengenbegriff berufen. Es gibt ganze Bücher darüber, was und wie man Dinge ausschließen oder hinzunehmen müsste um einen noch weitläufigeren Mengenbegriff zu erhalten. Darum wollen wir uns hier aber nicht beschäftigen, da für unsere Fälle, keine solches Paradoxon begegnen wird.

Wir wollen nun mit einigen grundlegenden Definitionen zum Thema "*Menge*"fortfahren:

Definition 1.4.2 (Element, (Echte) Teil- und Obermenge)**.** *Seien A und B zwei Mengen und a ein Objekt.*

(1) Ist das Objekt a in der Menge A enthalten, so nennen wir a ein Element von A. In diesem Fall schreiben wir:

$$a \in A \text{ bzw. } A \ni a.$$

Ist das Objekt a nicht in der Menge A enthalten, so schreiben wir $a \notin A$ bzw. $A \not\ni a$.

*(2) **Inklusion**: Gilt für jedes Element $x \in A$ auch, dass $x \in B$ ist, so nennen wir A eine **Teilmenge von** B und B nennen wir eine **Obermenge von** A. In diesem Fall schreiben wir:*

$$A \subseteq B \text{ bzw. } B \supseteq A.$$

*(3) Ist A eine Teilmenge von B und gibt es ein Element $x \in B$ so, dass $x \notin A$ ist, dann nennen wir A eine **echte Teilmenge von** B und analog B eine **echte Obermenge von** A. In diesem Fall schreiben wir*

$$A \subsetneq B \text{ bzw. } B \supsetneq A.$$

*(4) **Extensionalitätsprinzip/ Gleichheitsprinzip**: Die beiden Mengen A und B sind gleich/ identisch genau, dann wenn sie dieselben Elemente haben. In diesem Fall schreiben wir $A = B$. Sind die beiden Mengen, A und B, nicht gleich, so schreiben wir auch $A \neq B$.*

Manchmal wird auch anstatt $A \subseteq B$ einfach $A \subset B$ bzw. anstelle von $B \supseteq A$ auch $B \supset A$ geschrieben, beide Notationen sind gleichwertig. Üblicherweise bezeichnen wir Mengen mit Großbuchstaben A, B, C, usw. und Elemente mit Kleinbuchstaben a, b, c, x, usw..

1.5 Darstellung von Mengen

Die Elemente von Mengen werden durch geschweifte Klammern $\{\ldots\}$ zusammengefasst. Dies kann durch zwei verschiedene Arten geschehen:

(1) **Aufzählende Darstellung**: Die Menge A der Buchstaben des Namens "Paula"(mit Unterscheidung großer und kleiner Buchstaben), ist

$$A = \{P, a, u, l, a\} = \{P, a, u, l\} = \{l, P, u, a\}.$$

(2) **Beschreibende Darstellung**: Sei X eine Menge und für $x \in X$ sei $\mathcal{E}(x)$ eine mathematische Aussage. Nun können wir die Menge E aller $x \in X$ betrachten für die die Aussage $\mathcal{E}(x)$ wahr ist, dann schreiben wir dafür

$$E := \{x \in X \mid \mathcal{E}(x) \text{ ist wahr}\} = \{x \in X \mid \mathcal{E}(x)\} = \{x \in X : \mathcal{E}(x)\}\,.$$

Ein Beispiel zur beschreibenden Darstellung wäre z.B. wenn wir die Menge A aus (1) hernehmen und die Aussage $\mathcal{E}(x)$ für $x \in A$ prüft, ob das Element x ein Großbuchstabe ist. Genauer bedeutet dies:

$$E = \{x \in A \mid \mathcal{E}(x)\} = \{x \in A \mid x \text{ ist ein Großbuchstabe}\} = \{x \in \{P, a, u, l\} \mid x \text{ ist ein Großbuchstabe}\} = \{P\}\,.$$

Eine der wichtigsten Mengen (noch bevor wir zu den Zahlenbereichen kommen) ist die sogenannte **leere Menge**.

Definition 1.5.1 (Die leere Menge)**.** *Die Menge, die kein Element besitzt, wird als **leere Menge** bezeichnet. Wir schreiben dafür $\varnothing$ oder $\{\}$.*

Vorsicht: Die Menge, die die leere Menge als Element enthält ist nicht leer, d.h. $\varnothing$ und $\{\varnothing\}$ sind zwei verschiedene Dinge. Die Merkregel hierzu lautet:

"Ein Sack, der einen leeren Sack enthält, ist selbst nicht leer."

(Passt zu der Sichtweise oben von R. Dedekind.)

Zum Abschluss ein erster Satz zu dem, was wir über die Inklusion schon beweisen können:

Satz 1.5.2 (Elementare Eigenschaften der Inklusion)**.** *Seien A, B und C drei Mengen. Dann gilt:*

(1) $\varnothing \subseteq A$.

*(2) **Reflexivität**: $A \subseteq A$.*

*(3) **Transitivität**: Ist zusätzlich $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann ist $A \subseteq C$.*

*(4) **Gleichheitsprinzip**: Die beiden Mengen A und B sind gleich, genau dann wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ ist.*

Beweis. (1) Ist M eine Menge so, dass M keine Teilmenge der Menge A ist, dann gibt es laut Definition 1.4.2 ein Element $x \in X$ mit $x \notin A$. Da die leere Menge laut Definition 1.5.1 kein Element besitzt, muss also die leere Menge $\varnothing$ eine Teilmenge von A sein, d.h. $\varnothing \subseteq A$.
(2) Ist $A = \varnothing$, so wissen wir aus dem gerade bewiesenen (1), dass

$$A = \varnothing \subseteq \varnothing = A$$

gilt. Sei nun die Menge A nicht leer, dann gilt für alle Elemente $a \in A$, dass $a \in A$ ist, demnach ist per Definition der Teil- bzw. Obermenge 1.4.2:

$$A \subseteq A.$$

(3) Ist $A = \varnothing$, so wissen wir aus dem gerade bewiesenen (1), dass

$$A = \varnothing \subseteq C$$

gilt. Sei nun die Menge A nicht leer, dann gilt für alle Elemente $a \in A$, dass $a \in B$ nach Voraussetzung und der Definition der Teil- bzw. Obermenge 1.4.2. weiter folgt nun, weil B eine Teilmenge der Menge C ist nach Voraussetzung, laut der Definition der Teil- bzw. Obermenge 1.4.2 $a \in C$. Dies gilt für alle Objekte $a \in A$ und somit erneut nach Definition der Teil- bzw. Obermenge 1.4.2:

$$A \subseteq C.$$

(4) Es gelte zuerst $A = B$. Dann haben die beide Mengen, A und B, laut dem Extensionalitätsprinzip 1.4.2 die gleichen Elemente. Ist $A = \emptyset$ bzw. $B = \emptyset$, so ist auch $B = \emptyset$ bzw. $A = \emptyset$ und nach (1) haben wir

$$A = \emptyset \subseteq \emptyset = B \text{ und } B = \emptyset \subseteq \emptyset = A.$$

Ist hingegen A bzw. B nicht leer, so ist wegen $A = B$ auch B bzw. A nicht leer und es gilt für alle $a \in A$ und für alle $b \in B$:

$$a \in B \text{ und } b \in A$$

laut dem Extensionalitätsprinzip 1.4.2. Dies liefert uns

$$A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A.$$

Gelte nun $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Ist $A = \emptyset$ bzw. $B = \emptyset$, dann folgt aus $B \subseteq A$ bzw. $A \subseteq B$ nach der Definition der Teil- bzw. Obermenge 1.4.2, dass $B = \emptyset$ bzw. $A = \emptyset$ ist und damit auch $A = \emptyset = B$. Seien nun die beiden Mengen, A und B, nicht leer. Angenommen, dass A und B nicht gleich sind, also $A \neq B$.

Fall 1. Gebe es ein Objekt $x \in A$ so, dass $x \notin B$, dann folgt aus $A \subseteq B$ und der Definition der Teil- bzw. Obermenge 1.4.2:

$$x \in B,$$

was ein Widerspruch darstellt.

Fall 2. Gebe es ein Objekt $z \in B$ so, dass $z \notin A$, dann folgt aus $B \subseteq A$ und der Definition der Teil- bzw. Obermenge 1.4.2:

$$z \in A,$$

was ein Widerspruch darstellt. Also folgt nun:

$$A = B.$$

□

1.6 Operationen mit Mengen

In der Mathematik kommen Mengen tagtäglich vor und ähnlich wie bei den Aussagen gibt es auch zwischen Mengen Operationen, die als Resultate neue Mengen bilden. Diese wollen wir in diesem Unterabschnitt vorstellen und einige Rechenregeln dafür aufstellen.

Definition 1.6.1 (Vereinigung, Schnitt, relatives Komplement)**.** *Seien A und B zwei Mengen.*

*(1) Die **Vereinigung** $A \cup B$ von A und B definieren wir als*

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \textit{ oder } x \in B\}.$$

*(2) Der **Schnitt** $A \cap B$ von A und B definieren wir als*

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \textit{ und } x \in B\}.$$

*(3) Das **(relative) Komplement** $A \backslash B$ von B in A definieren wir als*

$$A \backslash B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

*(4) Das **kartesische Produkt** von A und B definieren wir als*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \textit{ und } b \in B\}.$$

Bemerkung: Wichtig wäre zu bemerken, dass beim relativen Komplement die Menge B keine Teilmenge von A sein muss.

Beispiel 1.6.2. *Setze die beiden Mengen*

$$A := \{1, 2, 3\} \text{ und } B := \{3, 4, 5\}.$$

So gilt per Definition 1.6.1:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \ A \cap B = \{3\}, \ A \backslash B = \{1, 2\} \text{ und } B \backslash A = \{4, 5\},$$

d.h. insbesondere ist $A \backslash B \neq B \backslash A$.

Bemerkung: Dieses Beispiel ist ein Gegenbeispiel zu der Behauptung, dass $A \backslash B = B \backslash A$ wäre (was falsch ist). Dieses Vorgehen lässt sich auch verallgemeinern und ist genau genommen ein Spezialfall des Beweises per Kontraposition wie wir es in Abschnitt **??** gesehen haben. Ist X eine Menge und wir haben zwei mathematische Aussagen $\mathcal{A}(x)$ und $\mathcal{B}(x)$ über $x \in X$. Nehmen wir an, wir wollen die folgende Behauptung widerlegen:

$$\text{Für jedes } x \in X \text{ gilt: } \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x).$$

Dann müssen wir "*nur*ein entsprechendes Element $\tilde{x} \in X$ finden mit der Eigenschaft $\mathcal{A}(\tilde{x}) \wedge \mathcal{B}(\tilde{x})$, d.h. das Element $\tilde{x}$ ist ein Gegenbeispiel für die Behauptung und somit ist diese widerlegt.

Nun zu den Rechenregeln für Vereinigung, Schnitt und Komplementbildung:

Satz 1.6.3 (Rechenregeln für Vereinigung, Schnitt und Komplement)**.** *Seien A, B und C drei Mengen. Dann gilt:*

(1) ***Kommutativität****: $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$.*

(2) ***Assoziativität****: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.*

(3) ***Distributivität****: $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.*

(4) ***Negation****:*

$$\begin{aligned} A \backslash A = \varnothing \text{ bzw. } A \backslash (A \backslash A) = A, \\ x \notin A \cup B \ \Leftrightarrow \ [x \notin A \text{ und } x \notin B], \\ x \notin A \cap B \ \Leftrightarrow \ [x \notin A \text{ oder } x \notin B]. \end{aligned}$$

Beweis. Für den Beweis setzen wir zu jedem x die mathematischen Aussagen:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x)&: x \in A, \\ \mathcal{B}(x)&: x \in B, \\ \mathcal{C}(x)&: x \in C. \end{aligned}$$

Demnach gilt für x:

$$\neg\mathcal{A}(x): x \notin A \text{ bzw. } \neg\mathcal{B}(x): x \notin B.$$

(1) Es gilt laut der Definition 1.6.1 für die Vereinigung und dem Schnitt und dem Satz 1.2.4(1):

$$\begin{aligned} x \in A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B}(x) \vee \mathcal{A}(x) \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \vee (x \in A) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\; x \in B \cup A, \\
x \in A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} &\Leftrightarrow\; (x \in A) \wedge (x \in B) \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x) \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{B}(x) \wedge \mathcal{A}(x) \\
&\Leftrightarrow\; (x \in B) \wedge (x \in A) \\
&\Leftrightarrow\; x \in B \cap A,
\end{aligned}
$$

d.h. $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$.
(3) Es gilt laut der Definition 1.6.1 für die Vereinigung und dem Schnitt und dem Satz 1.2.4(2):

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cup C = \{x \mid\; (x \in A \cup B) \vee (x \in C)\} &\Leftrightarrow\; (x \in A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}) \vee (x \in C) \\
&\Leftrightarrow\; [(x \in A) \vee (x \in B)] \vee (x \in C) \\
&\Leftrightarrow\; [\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)] \vee \mathcal{C}(x) \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A}(x) \vee (\mathcal{B}(x) \vee \mathcal{C}(x)) \\
&\Leftrightarrow\; (x \in A) \vee [(x \in B) \vee (x \in C)] \\
&\Leftrightarrow\; (x \in A) \vee (x \in B \cup C) \\
&\Leftrightarrow\; x \in A \cup (B \cup C)\,, \\
x \in (A \cap B) \cap C = (x \mid\; (x \in A \cap B) \wedge (x \in C)\} &\Leftrightarrow\; (x \in A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}) \wedge (x \in C) \\
&\Leftrightarrow\; [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge (x \in C) \\
&\Leftrightarrow\; [\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)] \wedge \mathcal{C}(x) \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A}(x) \wedge (\mathcal{B}(x) \wedge \mathcal{C}(x)) \\
&\Leftrightarrow\; (x \in A) \wedge [(x \in B) \wedge (x \in C)] \\
&\Leftrightarrow\; (x \in A) \wedge (x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow\; x \in A \cap (B \cap C)\,.
\end{aligned}
$$

(3) Es gilt laut der Definition 1.6.1 für die Vereinigung und dem Schnitt und dem Satz 1.2.4(3):

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C = \{x \mid\; (x \in A \cup B) \wedge (x \in C)\} &\Leftrightarrow\; (x \in A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}) \wedge (x \in C) \\
&\Leftrightarrow\; [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge (x \in C) \\
&\Leftrightarrow\; [\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)] \wedge \mathcal{C}(x) \\
&\Leftrightarrow\; [\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{C}(x)] \vee [\mathcal{B}(x) \wedge \mathcal{C}(x)] \\
&\Leftrightarrow\; [(x \in A) \wedge (x \in C)] \vee [(x \in B) \wedge (x \in C)] \\
&\Leftrightarrow\; (x \in A \cap B) \vee (x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow\; x \in (A \cap B) \cup (B \cap C)\,, \\
x \in (A \cap B) \cup C = \{x \mid\; (x \in A \cap B) \vee (x \in C)\} &\Leftrightarrow\; (x \in A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}) \vee (x \in C) \\
&\Leftrightarrow\; [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee (x \in C) \\
&\Leftrightarrow\; [\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)] \vee \mathcal{C}(x) \\
&\Leftrightarrow\; [\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{C}(x)] \wedge [\mathcal{B}(x) \vee \mathcal{C}(x)] \\
&\Leftrightarrow\; [(x \in A) \vee (x \in C)] \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)] \\
&\Leftrightarrow\; (x \in A \cup B) \wedge (x \in B \cup C) \\
&\Leftrightarrow\; x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)\,.
\end{aligned}
$$

(4) Angenommen $A \backslash A \neq \varnothing$, dann muss laut der Definition 1.6.1 für das relative Komplement gelten:

$$
\begin{aligned}
x \in A \backslash A = \{x \in A \mid x \notin A\} &\Leftrightarrow\; (x \in A) \wedge (x \notin A) \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{A}(x),
\end{aligned}
$$

d.h. dass es per Widerspruch so ein Element x nicht geben kann, also muss $A\backslash A = \varnothing$ sein. Hieraus ergibt sich direkt:

$$A\backslash (A\backslash A) = A\backslash\varnothing = \{x \in A \mid x \notin \varnothing\} = \{x \in A\} = A.$$

Weiter gilt nach der Definition 1.6.1 für die Vereinigung und dem Schnitt und dem Satz 1.2.4(4):

$$\begin{aligned}
x \notin A \cup B &\Leftrightarrow \neg\,(x \in A \cup B)\\
&\Leftrightarrow \neg\,[(x \in A) \vee (x \in B)]\\
&\Leftrightarrow \neg\,(\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x))\\
&\Leftrightarrow \neg\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{B}(x)\\
&\Leftrightarrow \neg\,(x \in A) \wedge \neg\,(x \in B)\\
&\Leftrightarrow (x \notin A) \text{ und } (x \notin B)\,,\\
x \notin A \cap B &\Leftrightarrow \neg\,(x \in A \cap B)\\
&\Leftrightarrow \neg\,[(x \in A) \wedge (x \in B)]\\
&\Leftrightarrow \neg\,(\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x))\\
&\Leftrightarrow \neg\mathcal{A}(x) \vee \neg\mathcal{B}(x)\\
&\Leftrightarrow \neg\,(x \in A) \vee \neg\,(x \in B)\\
&\Leftrightarrow (x \notin A) \text{ oder } (x \notin B)\,.
\end{aligned}$$

□

Wie auch schon bei de logischen Verknüpfungen zwischen mathematischen Aussagen können wir wegen der bewiesenen Assoziativität der Vereinigung bzw. dem Schnitt die Klammern in diesen Fällen weglassen, d.h. wir setzen

$$A \cup B \cup C := (A \cup B) \cup C \text{ und } A \cap B \cap C := (A \cap B) \cap C.$$

Eine wichtige Beziehung, welche durch die sogenannten de Morganschen Regeln beschrieben werden, ist die zwischen Komplement und Vereinigung bzw. Schnitt, dies führt uns zu unserem nächsten Satz:

Satz 1.6.4 (De Morgansche Regeln)**.** *Seien A, B und C drei Mengen. Dann gilt:*

(1) $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$.

(2) $(A \cap B)\backslash C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$.

(3) $C\backslash (A \cup B) = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$.

(4) $C\backslash (A \cap B) = (C\backslash A) \cup (C\backslash B)$.

Beweis. Für den Beweis setzen wir zu jedem x die mathematischen Aussagen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x)&\colon x \in A,\\
\mathcal{B}(x)&\colon x \in B,\\
\mathcal{C}(x)&\colon x \in C.
\end{aligned}$$

Demnach gilt für x:

$$\neg\mathcal{A}(x)\colon x \notin A,\ \neg\mathcal{B}(x)\colon x \notin B,\ \text{bzw. } \neg\mathcal{C}(x)\colon x \notin C.$$

(1) Es gilt laut der Definition 1.6.1 für die Vereinigung und des relativen Komplements und dem Satz 1.2.4(3):

$$x \in (A \cup B)\backslash C = \{x \mid x \in A \cup B \text{ und } x \notin C\} \Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin C)$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge (x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) \wedge \neg\mathcal{C}(x) \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{C}(x)) \vee (\mathcal{B}(x) \wedge \neg\mathcal{C}(x)) \\
&\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin C)] \vee [(x \in B) \wedge (x \notin C)] \\
&\Leftrightarrow (x \in A \backslash C) \vee (x \in B \backslash C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \backslash C) \cup (B \backslash C)\,.
\end{aligned}
$$

(2) Es gilt laut der Definition 1.6.1 für den Schnitt und des relativen Komplements und dem Satz 1.2.4(2):

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \backslash C = \{x \mid x \in A \cap B \text{ und } x \notin C\} &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \wedge (x \notin C) \\
&\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge (x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)) \wedge \neg\mathcal{C}(x) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A}(x) \wedge (\mathcal{B}(x) \wedge \neg\mathcal{C}(x)) \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{C}(x)) \wedge (\mathcal{B}(x) \wedge \neg\mathcal{C}(x)) \\
&\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin C)] \wedge [(x \in B) \wedge (x \notin C)] \\
&\Leftrightarrow (x \in A \backslash C) \wedge (x \in B \backslash C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \backslash C) \cap (B \backslash C)\,.
\end{aligned}
$$

(3) Es gilt laut der Definition 1.6.1 für das relative Komplement und den Sätzen 1.6.3(4) und 1.2.4(2):

$$
\begin{aligned}
x \in C \backslash (A \cup B) = \{x \mid x \in C \text{ und } x \notin A \cup B\} &\Leftrightarrow (x \in C) \wedge (x \notin A \cup B) \\
&\Leftrightarrow (x \in C) \wedge [(x \notin A) \wedge (x \notin B)] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{C}(x) \wedge (\neg\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{B}(x)] \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{C}(x) \wedge \neg\mathcal{A}(x)) \wedge \neg\mathcal{B}(x) \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{C}(x) \wedge \neg\mathcal{A}(x)) \wedge (\mathcal{C}(x) \wedge \neg\mathcal{B}(x)) \\
&\Leftrightarrow [(x \in C) \wedge (x \notin A)] \wedge [(x \in C) \wedge (x \notin B)] \\
&\Leftrightarrow (x \in C \backslash A) \wedge (x \in C \backslash B) \\
&\Leftrightarrow x \in (C \backslash A) \cap (C \backslash B)\,.
\end{aligned}
$$

(4) Es gilt laut der Definition 1.6.1 für das relative Komplement und den Sätzen 1.6.3(4) und 1.2.4(3):

$$
\begin{aligned}
x \in C \backslash (A \cap B) = \{x \mid x \in C \text{ und } x \notin A \cap B\} &\Leftrightarrow (x \in C) \wedge (x \notin A \cap B) \\
&\Leftrightarrow (x \in C) \wedge [(x \notin A) \vee (x \notin B)] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{C}(x) \wedge (\neg\mathcal{A}(x) \vee \neg\mathcal{B}(x)] \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{C}(x) \wedge \neg\mathcal{A}(x)) \vee (\mathcal{C}(x) \wedge \neg\mathcal{B}(x)) \\
&\Leftrightarrow [(x \in C) \wedge (x \notin A)] \vee [(x \in C) \wedge (x \notin B)] \\
&\Leftrightarrow (x \in C \backslash A) \vee (x \in C \backslash B) \\
&\Leftrightarrow x \in (C \backslash A) \cup (C \backslash B)\,.
\end{aligned}
$$

□

1.7 Die Quantoren

Die beiden Quantoren, $\exists$ und $\forall$, sind logische Zeichen, die der abkürzenden Schreibweise in der Aussagenlogik dienen.

Definition 1.7.1 (Existenz- und Allquantor)**.** *Seien X eine Menge und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft so, dass $\mathcal{E}(x)$ eine mathematische Aussage ist für jedes $x \in X$. Dann definieren wir:*

$(\exists x \in X : \mathcal{E}(x))$		*"Es existiert ein $x \in X$ so, dass $\mathcal{E}(x)$ wahr ist."*
	bzw.	*"Es existiert ein $x \in X$ mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$."*
$(\forall x \in X : \mathcal{E}(x))$		*"Für alle $x \in X$ gilt $\mathcal{E}(x)$."*

Beispiel: Sei X die Menge aller Teilnehmer*innen des Mathematik Vorkurses 2019 am KIT und $\mathcal{E}(x)$ die Aussage

"x trägt eine Brille."

Dann bedeutet:

(1) $\exists x \in X : \mathcal{E}(x)$: *"Mindestens ein/e Teilnehmer*in trägt eine Brille."*

(2) $\forall x \in X : \mathcal{E}(x)$: *"Alle Teilnehmer*innen tragen eine Brille."*

Hierbei sehen wir auch, dass der Existenzquantor uns keine Aussage darüber liefert auf wie viele Elemente die Eigenschaft zutrifft, wir wissen nur, dass es ein Element mit dieser Eigenschaft dann geben muss.

Wir können die Quantoren auch iterativ (also nacheinander) verwenden. Seien dazu X und Y zwei Mengen und wir betrachten das kartesische Produkt aus Definition **??**

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in y\} .$$

Weiter sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft auf $X \times Y$, d.h. für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ ist $\mathcal{E}(x, y)$ eine mathematische Aussage.

Dann lesen wir normal von links nach rechts:

1.	$\exists x \in X : (\exists y \in Y : \mathcal{E}(x, y))$	*"Es existiert ein $x \in X$ und ein $y \in Y$ mit der Eigenschaft $\mathcal{E}(x, y)$."*
2.	$\forall y \in Y : (\forall x \in X : \mathcal{E}(x))$	*"Für alle $y \in Y$* und für alle *$x \in X$ gilt $\mathcal{E}(x, y)$."*
3.	$\forall x \in X : (\exists y \in Y : \mathcal{E}(x, y))$	*"Zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$* mit der Eigenschaft $\mathcal{E}(x, y)$."
4.	$\exists x \in X : (\forall y \in Y : \mathcal{E}(x, y))$	*"Es gbt ein $x \in X$ so, dass für alle $y \in Y$* gilt $\mathcal{E}(x, y)$."

Wie wir hier an 2. sehen konnten, musste nicht immer die erste Komponente (die Elemente aus der Menge X) zuerst genant werden. In der Regel lassen wir die Klammern weg, wenn wir einfach Zeichen für Zeichen von links nach rechts lesen können. Zudem fällt im direkten Vergleich der beiden Beispiele 3. und 4. auf, dass die Reihenfolge von Existenz- und Allquantor eine wichtige Rolle spielen. In unserem Sprachgebrauch wäre, wenn beispielweise X die Menge aller Töpfe, Y die Menge aller Deckel und $\mathcal{E}(x, y)$ die Aussage "*Der Deckel y passt auf den Topf x.*ïst, die Aussage 3. folgendermaßen zu übersetzen:

"Zu jedem Topf gibt es einen Deckel, der passt."

Anders sieht es da bei der Aussage 4. aus, die würde nämlich lauten:

"Es gibt einen Topf auf den jeder Deckel passt."

1.7.1 Verneinung (Negation) von mathematischen Aussagen

Oftmals können wir einfachere (mathematische) Aussagen per "*Gefühl*"verneinen, allerdings bei welchen, die wieder aus Verknüpfung mit anderen bestehen wird es schnell komplizierter. Glücklicherweise gibt es einige einfache Regeln, wie das Negieren von Aussagen ganz "mechanischßu bewerkstelligen ist:

(N1) Behalte stets die Reihenfolge bei!

(N2) Aus dem Existenzquantor $\exists$ wird der Allquantor $\forall$ und umgekehrt.

(N3) Aus dem logischen "*und*"$\wedge$ wird das logische "*oder*ünd umgekehrt.

(N4) Verneine alle auftretenden mathematischen Aussagen.

Die Regel Nummer 3 fürs Negieren haben wir schon in Satz **??** kennengelernt.

Im weiteren zwei kurze Beispiele, wo wir die Regeln (N1) bis (N4) anwenden werden:

(1) $\neg\,(\forall x \in X\colon \mathcal{E}(x)) \;\Dashv\vDash\; (\exists x \in X\colon \neg\mathcal{E}(x))$: Die Negation der Aussage "*alle Teilnehmer*innen waren pünktlich da.*"lautet "*Mindestens ein/e Teilnehmer*in war unpünktlich.*".

(2) $\neg\,(\exists x \in X\colon\; (\forall y \in Y\colon \mathcal{E}(x,y))) \;\Dashv\vDash\; (\forall x \in X\colon\; (\exists y \in Y\colon \neg\mathcal{E}(x,y)))$: Die Negation der Aussage "*Es gibt eine Person hier, die alle Anwesenden bereits kennt.*"lautet "*Alle Personen hier kennen mindestens einen Anwesenden nicht.*".

1.8 Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Wir gehen an dieser Stelle davon aus, dass die grundlegenden Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bekannt sind und werden daher nur unformal an die wesentlichen Eigenschaften erinnern. In den Vorlesungen werden wir dann eine strigentere Konstruktion dieser Zahlenbereiche und auch die Herleitung der charakterisierenden Eigenschaften kennenlernen.

Die **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} := \{1,2,3,4,\ldots\}$: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl, und jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat einen Nachfolger $n+1 \in \mathbb{N}$; demnach gibt es keine größte natürliche Zahl. In den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ uneingeschränkt ausführbar, d.h. für zwei natürliche Zahlen gilt stets $a+b \in \mathbb{N}$ und $a \cdot b \in \mathbb{N}$. Wir setzen für die **natürlichen Zahlen mit Null** $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für die natürlichen Zahlen mit Null $\mathbb{N}_0$ gelten dieselben Regeln wie für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Die **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$: In den ganzen Zahlen besitzt die Gleichung $x+b=a$ für $a,b \in Z$ bekannt und x unbekannt, stets eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$. Zudem gilt, dass $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ist, aber im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gibt es keine kleinste Zahl. In den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind die Rechenoperationen $+$, $-$ und $\cdot$ uneingeschränkt ausführbar.

Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q} := \left\{x \mid x = \frac{a}{b}\text{ für eine ganze Zahl } a \in \mathbb{Z} \text{ und eine natürliche Zahl } b \in \mathbb{N}\right\}$: Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen stets noch unendlich viele andere rationale Zahlen. Jede rationale Zahl $q \in Q$ lässt sich als endliche oder periodische Dezimalzahl schreiben und umgekehrt stellt jede endliche oder periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl dar. Es gilt $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, und weiter sind die Rechenoperationen $+$, $-$ und $\cdot$, sowie das Teilen durch Nichtnull-Elemente $q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ uneingeschränkt ausführbar.

Die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$: Für unseren Kontext genügt es, dass wir uns unter einer reellen Zahl alle möglichen Dezimalzahlen vorstellen, d.h. endliche, periodische und nicht-endliche, nicht-periodische Dezimalzahlen. Damit ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ und auch die Rechenoperationnen $+$, $-$ und $\cdot$, sowie das Teilen durch Nichtnull-Elemente $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind uneingeschränkt ausführbar.

Bemerkung: Es gilt:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Im Laufe des Studium werden wir noch weitere Zahlenbereiche wie z.B. die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kennenlernen. Die letzte Inklusion oben ist mit etwas Vorsicht zu genießen, da die Definition der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu ungenau formuliert ist. Wir zeigen als nächstes, dass quadratische Gleichungen nicht immer in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gelöst werden, denn

Satz 1.8.1 ("Wurzel aus 2 ist nicht rational"). *Es gibt keine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit*

$$q^2 := q \cdot q = 2.$$

Um diesen Beweis führen zu können, benötigen wir noch die Rechengesetze, welche im nächsten Abschnitt 1.9 behandelt wird. Daher verschieben wir den Beweis in den letzten Abschnitt 1.11 des Kapitel 1.

1.9 Rechenregeln und Ordnungsrelationen für die reellen Zahlen

1.9.1 Die Rechenregeln für die reellen Zahlen

Wir wiederholen hier die bekannten Rechengesetze für die reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$:

Kommutativgesetz	$a + b = b + a,$ $ab := a \cdot b = b \cdot a.$
Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c)\,,$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,.$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\,.$
Verträglichkeit mit der Null	$a + 0 = a,$ $a \cdot 0 = 0.$
Verträglichkeit mit der Eins	$a \cdot 1 = a.$
Binomische Formeln	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$
Vorzeichenregeln	$-(-a) = a,$ $-(a + b) = -a - b,$ $-(a - b) = -a + b.$

Weiter gelten für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0 \neq d$ die folgenden Regeln fürs Bruchrechnen:

Addition	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$
Division	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ für $c \neq 0.$
Kürzen	Existieren reelle Zahlen $x, y, k \in \mathbb{R}$ mit $a = xk$ und $b = yk,$ so gilt : $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}.$

1.9.2 Die Ordnungsrelation auf den reellen Zahlen

Wir vereinbaren für die reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$:

$a = b$	steht für *ä ist gleich b.”*
$a < b$	steht für *ä ist echt kleiner als b.”*
$a > b$	steht für *ä ist echt größer als b.”*
$a \leqslant b$	steht für *ä ist kleiner oder gleich b.”*
$a \geqslant b$	steht für *ä ist größer oder gleich b.”*

Bemerkung: Per Definition folgt aus $a < b$ stets $a \leqslant b$, aber im Allgemeinen folgt nicht aus $a \leqslant b$, dass auch $a < b$ gelten muss.

Die reellen Zahlen können auf der Zahlengerade veranschaulicht werden. Jeder reellen Zahl entspricht somit genau ein Punkt auf der Zahlengerade und umgekehrt. Für zwei beliebige reelle Zahlen x und y kann eindeutig entschieden werden, ob $x < y$, $x = y$ oder $x > y$ gilt. Auf der Menge der reellen Zahlen ist damit eine Ordnungsstruktur gegeben. Der folgende Satz gibt an, welche Regeln und Gesetze für $<, >, \leqslant, \geqslant$ und $=$ gelten auf den reellen Zahlen.

Satz 1.9.1 (Regeln für die Ordnungsrelation auf den reellen Zahlen)**.** *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ drei reelle Zahlen. Dann gilt:*

(1) ***Reflexivität****: $a = a,\ a \leqslant a$ und $a \geqslant a$.*

(2) ***Transitivität****:*

- *Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.*
- *Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$.*
- *Aus $a \leqslant b$ und $b \leqslant c$ folgt $a \leqslant c$.*
- *Aus $a \geqslant b$ und $b \geqslant c$ folgt $a \geqslant c$.*
- *Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$.*

(3) ***Antisymmetrie****: Aus $a \leqslant b$ und $b \leqslant a$ folgt $a = b$.*

(4) ***Totalität****: Es ist $a \leqslant b$ oder $a \geqslant b$.*

(5) ***Verträglichkeit mit der Addition****:*

- *Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.*
- *Aus $a > b$ folgt $a + c > b + c$.*
- *Aus $a \leqslant b$ folgt $a + c \leqslant b + c$.*
- *Aus $a \geqslant b$ folgt $a + c \geqslant b + c$.*
- *Aus $a = b$ folgt $a + c = b + c$.*

(6) ***Verträglichkeit mit der Multiplikation bei*** *$c > 0$:*

- *Aus $a < b$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$.*
- *Aus $a > b$ folgt $a \cdot c > b \cdot c$.*
- *Aus $a \leqslant b$ folgt $a \cdot c \leqslant b \cdot c$.*
- *Aus $a \geqslant b$ folgt $a \cdot c \geqslant b \cdot c$.*
- *Aus $a = b$ folgt $a \cdot c = b \cdot c$.*

(7) ***Verträglichkeit mit der Multiplikation bei*** $c < 0$:

- *Aus* $a < b$ *folgt* $a \cdot c > b \cdot c$.
- *Aus* $a > b$ *folgt* $a \cdot c < b \cdot c$.
- *Aus* $a \leqslant b$ *folgt* $a \cdot c \geqslant b \cdot c$.
- *Aus* $a \geqslant b$ *folgt* $a \cdot c \leqslant b \cdot c$.
- *Aus* $a = b$ *folgt* $a \cdot c = b \cdot c$.

1.10 Intervalle

Definition 1.10.1 (Offene, abgeschlossene und halboffene Intervalle)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leqslant b$. *Dann definieren wir*

- *das* ***offene Intervall*** (a, b) *durch die Menge*

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

- *das* ***abgeschlossene Intervall*** $[a, b]$ *durch die Menge*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

- *die* ***halboffenen Intervalle*** $(a, b]$ *und* $[a, b)$ *durch die Mengen*

$$\begin{aligned}(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\},\\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $a = b$, so ist

$$[a, a] = \{a\} \text{ und } (a, a) = (a, a] = [a, a) = \varnothing.$$

Im Fall von der leeren Menge sprechen wir auch manchmal von einem leeren Intervall.

Wir können auch $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ zulassen, so ergeben sich fünf weitere Intervalle:

Definition 1.10.2 (Unbeschränkte Intervalle)**.** *Sei* $a \in \mathbb{R}$. *Dann definieren wir*

die ***offenen (unbeschränkte) Intervalle*** $(-\infty, a)$, (a, ∞) *und* $(-\infty, \infty)$ *durch die Mengen:*

$$\begin{aligned}(-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},\\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},\\ (-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

die ***halboffenen (unbeschränkten) Intervalle*** $(-\infty, a]$ *und* $[a, \infty)$ *durch die Mengen:*

$$\begin{aligned}(-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\},\\ [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}.\end{aligned}$$

Ein kleiner Satz über den Zusammenhang zwischen Schnitten und Intervallen:

Satz 1.10.3 (Schnitte von Intervallen)**.** *Sind* $I, J \subseteq \mathbb{R}$ *zwei Intervalle, so ist deren Schnitt* $I \cap J \subseteq \mathbb{R}$ *stets wieder ein Intervall.*

Beispiele:

(1) $[3,4] \cap [1,\infty) = [3,4]$.

(2) $[-2,0) \cap (-1,0) = (-1,0)$.

(3) $[4,7] \cap [8,9) = \emptyset$.

(4) $[7,8] \cap [8,9) = [3,8] = \{8\}$.

(5) $[4,5) \cup (-3,1]$ ist kein Intervall.

(6) $[4,5] \cup (-3,4) = (-3,5]$.

Beispiel (5) und (6) zeigen uns, dass ein vergleichbarer Satz wie der Satz 1.10.3 oben für die Vereinigung von zwei Intervallen nicht gelten kann, d.h. die Vereinigung zweier intervall kann wieder ein Intervall sein (siehe Beispiel (6)), muss es aber nicht (siehe Beispiel (5)).

1.11 Nachtrag zu den Zahlenbereichen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

In diesem letzten Abschnitt wollen wir den Satz 1.8.1 beweisen, da wir nun (fast) alles dazu haben. Einzig eine weitere Definition und einen weiteren Satz benötigen wir:

Definition 1.11.1 (Gerade und Ungerade natürliche Zahlen). *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir nennen die Zahl n*

- ***gerade**, falls es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gibt so, dass $n = 2k$ gilt.*
- ***ungerade**, falls es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gibt so, dass $n = 2k+1$ gilt.*

Bemerkung: Die natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k$ oder $n = 2k+1$ ist stets eindeutig festgelegt, d.h. gebe es noch eine zweite natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2l$ oder $n = 2l+1$, so folgt direkt, dass $k = l$ sein muss. Außerdem ist jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ entweder gerade oder ungerade.

Satz 1.11.2. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Dann gilt die Äquivalenz:*

$$n \text{ ist gerade} \Leftrightarrow n^2 \text{ ist gerade.}$$

Beweis. Erstmal wissen wir wegen der Verträglichkeit mit der Multiplikation in $\mathbb{N}_0$, dass auch n^2 in $\mathbb{N}_0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Um die Äquivalenz zu beweisen, zeigen wir beide Implikationen einzeln (vergleiche mit Beispiel 1.2.3(3)).
"$\Rightarrow$": (Direkter Beweis) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine gerade natürliche Zahl, dann existiert nach Definition 1.11.1 eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k$. Es gilt nun für n^2:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot \left(2k^2\right)$$

und $k^2 \in \mathbb{N}_0$ nach der obigen Bemerkung, also ist auch wegen der Verträglichkeit mit der Multiplikation $l := 2k^2 \in \mathbb{N}_0$. Damit ist

$$n^2 = 2 \cdot \left(2k^2\right) = 2l$$

eine gerade Zahl laut Definition 1.11.1.
"$\Leftarrow$": (Beweis per Kontraposition) Ist nun $n \in \mathbb{N}_0$ eine ungerade natürliche Zahl, so existiert laut Definition 1.11.1 ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k+1$. Es gilt nun für n^2 nach der binomischen Formel:

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 2 \cdot 2k(k+1) + 1$$

und $2k$ wie auch $k+1$ sind wegen der Verträglichkeit mit der Multiplikation bzw. Addition in $\mathbb{N}_0$, daher aus dem gleichen Grund auch $l := 2k\,(k+1) \in \mathbb{N}_0$. Damit ist

$$n^2 = 2 \cdot 2k\,(k+1) + 1 = 2l + 1$$

eine ungerade Zahl nach Definition 1.11.1. Also folgt nun nach dem Beweisprinzip der Kontraposition, dass aus n^2 gerade auch n gerade sich ergibt.
Wegen Beispiel 1.2.3(3) haben wir somit die Äquivalenz gezeigt. □

Nun können wir (endlich), den Satz 1.8.1 beweisen:

von Satz **??**. (Widerspruchsbeweis) Annahme: Es gebe eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$.
Wähle dann zwei Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $q = \frac{a}{b}$ vollständig gekürzt, d.h. aus $x \in \mathbb{Z}$, $k, y \in \mathbb{N}$ mit $a = xk$ und $b = yk$ folgt stets $k = 1$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} 2 &= q^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow\ 2b^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Weiter ist $a^2 \in \mathbb{N}_0$ und a oder $-a$ eine natürliche Zahl, und so erhalten wir mit dem Satz 1.11.2, dass a gerade bzw. $-a$ (falls $a < 0$ ist) gerade ist. Also existiert nach Definition 1.11.1 eine Zahl $l \in \mathbb{N}_0$ mit $a = 2l$ bzw. $a = -2l$. Weiter folgt nun

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 = (\pm 2l)^2 = 4l^2 \\ \Leftrightarrow\ b^2 &= 2l^2, \end{aligned}$$

d.h. b^2 ist gerade wegen $l^2 \in \mathbb{N}_0$ laut der Verträglichkeit mit der Multiplikation. Erneut mit dem Satz 1.11.2 haben wir, dass so auch b gerade ist, d.h.nach Definition 1.11.1 existiert eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $b = 2k$. Nun sind aber a und b nicht mehr so gewählt, dass deren Bruch $q = \frac{a}{b}$ vollständig gekürzt ist, denn wir können schreiben:

$$q = \frac{a}{b} = \frac{\pm 2l}{2k} = \frac{\pm l}{k}.$$

Dies ist ein Widerspruch zur vollständigen Gekürztheit, also war die Annahme falsch und somit gibt es keine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. □

Bemerkung: Oftmals sagen wir auch, dass wenn eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ nicht rational, d.h. $x \notin \mathbb{Q}$ ist, so ist die Zahl x irrational. In unserem Falle wäre jedes x, was die Gleichung $x^2 = 2$ löst, irrational laut dem Satz 1.8.1. In der Vorlesung sehen wir dann, dass über solche Gleichungen die Wurzel definiert wird, hier wäre $x = \pm\sqrt{2}$.

2 Funktionen

In diesem Kapitel wenden wir uns dem Begriff der *Funktion* zu. Erstmal definieren wir abstrakt, was wir darunter verstehen, danach was für erste "*einfache*Ëigenschaften Funktionen haben können, wie wir mehere Funktionen mit einer verketten können. Anschließend befassen wir uns mit vier ganz konkreten reellen Funktionen: Der Potenzfunktion, dem Logarithmus- und der Exponentialfunktion, sowie der Betragsfunktion. Diese Funktionen werden uns in Kapitel 4 wieder begegnen.

2.1 Allgemeiner Funktionsbegriff und elementare Definitionen

Beginnen wir mit der Definition einer Funktion

Definition 2.1.1 (Funktion, Definitionsmenge und Wertebereich)**.** *Seien A und B zwei Mengen, $x \mapsto f(x)$ eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Dann nennen wir das Tripel $(A, x \mapsto f(x), B)$ eine* ***Funktion*** *und schreiben kürzer $f\colon A \to B$ oder, sofern keine Verwechslungen möglich sind, auch nur f. Wir schreiben auch:*

$$f\colon A \to B,\ x \mapsto f(x).$$

Die Menge A heißt ***Definitionsbereich der Funktion*** *f und die Menge B heißt* ***Wertebereich der Funktion*** *f.*

Weitere wichtige Mengen im Zusammenhang mit Funktionen sind die folgenden:

Definition 2.1.2 (Bild und Urbild einer Funktion)**.** *Seien $f\colon A \to B$ eine Funktion, $D \subseteq A$ eine Teilmenge von A und $Y \subseteq B$ eine Teilmenge von B. Wir bezeichnen mit*

- *$f(D)$ das* ***Bild von D unter der Funktion*** *f, welches definiert ist durch*

$$f(D) := \{y \in B \mid \text{es existiert ein } x \in A \text{ mit } f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B.$$

- *$f^{-1}(Y)$ das* ***Urbild von Y unter der Funktion*** *f, welches definiert ist durch*

$$f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid \text{es gibt ein } y \in Y \text{ mit } y = f(x)\} \subseteq A.$$

Bemerkung: Ist $f\colon A \to B$ eine Funktion, so sagen wir manchmal auch, dass die Menge $f(A)$ das **Bild der Funktion** f ist.

Nun zu einigen Beispielen:

Beispiel 2.1.3. *(1) Eine Definition einer Funktion lautet z.B.*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+1)(x-2)\,.$$

Hier wäre sowohl der Definitions- als auch der Wertebereich gleich $\mathbb{R}$. Wenn wir uns z.B. dafür interessieren, wann diese Funktion den Funktionswert null annimmt, so würde dies das folgende Urbild beschreiben:

$$f^{-1}(\{0\}) = \{-1, 2\}\,.$$

(2) Wir definieren die Funktion f durch

$$f\colon\ [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{für } x \in [0,1) \\ 2 & \textit{für } x = 1 \\ x & \textit{für } x \in (1,2] \end{cases} .$$

Hier wäre das Bild von der Menge $X_1 = [0,1]$ unter der Funktion f gerade

$$f\left([0,1]\right) = \{0,2\}\,,$$

aber das Bild von der Menge $X_2 = [1,2]$ unter der Funktion f wäre

$$f\left([1,2]\right) = [1,2]\,.$$

Außerdem fällt uns an dieser Funktion auf, dass Bild und Wertebereich nicht gleich sein müssen, sondern das Bild auch eine echte Teilmenge sein kann.

Bemerkung: Herzlichen Glückwunsch an dieser Stelle :) Nun haben wir die elementare Begriffe der Mathematik aufgearbeitet: Aussage, Menge und Funktion.

2.2 Eigenschaften von Funktionen

Wir haben in Beispiel 2.1.3(2) gesehen, dass das Bild und der Wertebereich einer Funktion nicht übereinstimmen müssen. In diesem Abschnitt wollen wir uns damit befassen, was wir haben, wenn das Bild doch der ganze Wertebereich ist und andere Eigenschaften in dem Zusammenhang mit Definitionsmenge, Wertebereich, Bild einer Funktion f.

Definition 2.2.1 (Injektivität, Surjektivität und Bijektivität)**.** *Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Wir nennen die Funktion f*

- ***injektiv**, falls für alle $a_1 \in A$ und $a_2 \in A$ mit $f(a_1) = f(a_2)$ folgt $a_1 = a_2$.*
- ***surjektiv**, falls zu jedem $b \in B$ ein Element $a \in A$ existiert mit $b = f(a)$.*
- ***bijektiv**, falls die Funktion f injektiv und surjektiv ist.*

Bemerkung: Anschaulich bedeuten die beiden Begriffe, injektiv und surjektiv, für eine Funktion $f\colon A \to B$, dass

f **injektiv**	kein Wert in der Menge B wird mehrfach angenommen.
f **surjektiv**	jeder Wert in der Menge B wird mindestens einmal angenommen.

Zum Begriff der Bijektivität kommen wir später beim Abschnitt 2.3 nochmal darauf zu sprechen.

Beispiel 2.2.2 (Gleicher Funktionswert, aber verschiedene Eigenschaften)**.** *Die Funktionen*

$$f_1\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \text{ und } f_2\colon\ (0,\infty) \to (0,\infty)\,,\ x \mapsto x^2$$

haben zwar für alle $x \in (0,\infty)$ denselben Funktionswert, aber die Funktion f_1 ist "nur"injektiv, wohingegen die Funktion f_2 injektiv und surjektiv, d.h. bijektiv ist.

2.3 Operationen mit Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir einige elementare Operationen kennenlernen wie und unter welchen Bedingungen wir aus einer oder mehreren Funktionen neue Funktionen konstruieren können. Eine der einfachsten Möglichkeiten ist die der Einschränkung bzw. der Ko-Einschränkung:

Definition 2.3.1 (Restriktion und Korestriktion)**.** *Seien $f\colon A \to B$ eine Funktion, $D \subseteq A$ eine Teilmenge von A, sowie $Y \subseteq B$ eine Teilmenge von B mit der Eigenschaft, dass $f(x) \in Y$ für alle $x \in A$. Dann nennen wir die Funktion*

- *$g\colon D \to B,\ x \mapsto f(x)$ die **Restriktion** (oder die **Einschränkung**) der Funktion f auf die Menge D. Wir schreiben anstatt g auch $f|_D$.*
- *$h\colon A \to Y,\ x \mapsto f(x)$ die **Korestriktion** der Funktion f auf die Menge Y.*

Bemerkung: Oftmals wird für die eigentliche Funktion und für ihre Korestriktion derselbe Funktionsname verwendet. Ein Begriff, der im Zuge der Restriktion auch oft fällt, ist der der **Fortsetzung** einer Funktion. Sind $f\colon A \to B$ und $F\colon X \to Y$ zwei Funktionen, dann heißt F eine Fortsetzung der Funktion f genau, dann wenn $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ ist und $F|_A(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ gilt.

Beispiel 2.3.2. *Ein Beispiel für eine Korestriktion haben wir schon im Beispiel 2.2.2 gesehen, wo f_2 eine Korestriktion der Funktion f_1 war. Wenn wir andererseits z.B. die beiden Funktionen*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 100 \text{ für } x = 0 \\ x^2 \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{und } g\colon \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup (5,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ für } x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \\ x^2 \text{ sonst} \end{cases}$$

betrachten, so ist g eine Restriktion der Funktion f auf die Menge $\left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup (5,\infty)$, bzw. anders ausgedrückt gilt: $g = f|_{\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup(5,\infty)}$. Die Funktion f hingegen, wäre eine Fortsetzung der Funktion g.

Ein Satz, der zu mehr Beispielen führt und den Übergang zum vorherigen Abschnitt 2.2 schafft, lautet:

Satz 2.3.3 (Existenz der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Dann gilt:*

(1) Die Korestriktion $g\colon A \to f(A),\ x \mapsto f(x)$ der Funktion f auf ihr Bild $f(A)$ ist stets surjektiv.

(2) Ist die Funktion f injektiv, so ist ihre Korestriktion $g\colon A \to f(A),\ x \mapsto f(x)$ auf ihr Bild $f(A)$ bijektiv.

(3) Ist die Funktion f bijektiv, so existiert eine bijektive Funktion $h\colon B \to A$.

Beweis. (Direkter Beweis) (1) Sei $y \in f(A)$, dann finden wir laut Definition 2.1.2 ein Element $a \in A$ mit $f(a) = y$. Es gilt:

$$g(a) = f(a) = y.$$

Also ist $g(A) = f(A)$ und damit ist die Funktion g surjektiv nach Definition 2.2.1.
(2) Sei f eine injektive Funktion. Weiter seien $a_1 \in A$ und $a_2 \in A$ mit $g(a_1) = g(a_2)$, dann gilt:

$$f(a_1) = g(a_1) = g(a_2) = f(a_2)$$

und wegen der Injektivität der Funktion f folgt nun per Definition 2.2.1: $a_1 = a_2$. Also ist auch die Korestriktion g injektiv. Nach (1) ist die Korestriktion surjektiv und damit folgt per Definition 2.2.1, dass die Korestriktion bijektiv sein muss.
(3) Wir definieren die Funktion h für $y \in B$ durch

$$h(y) = x \in A \text{ mit der Eigenschaft, dass } f(x) = y \text{ ist.}$$

Wegen der Surjektivität der Funktion f existiert zu jedem $y \in B$ so ein $x \in A$ und wegen der Injektivität der Funktion f ist dieses $x \in A$ stets eindeutig festgelegt (d.h. es kann kein weiteres $x \in A$ mit dieser Eigenschaft geben). Damit ist die Funktion h wohl-definiert. Seien $y_1 \in B$ und $y_2 \in B$ so, dass $h(y_1) = h(y_2)$ gilt, dann folgt per Definition der Funktion h für $a_1 := h(y_1) \in A$ und $a_2 := h(a_2) \in A$, dass $a_1 = a_2$ ist und

$$y_1 = f(a_1) = f(a_2) = y_2,$$

d.h. die Funktion h ist injektiv laut Definition 2.2.1. Andererseits sei $a \in A$, dann setzen wir $y := f(a) \in B$, so gilt per Definition der Funktion h:

$$h(y) = a,$$

d.h. die Funktion h ist surjektiv laut Definition 2.2.1. Damit ist die Funktion h nun bijektiv laut Definition 2.2.1. □

Bemerkung: Dieser Satz gibt uns auch eine Wertung der beiden Eigenschaften "*injektiv*ünd "*surjektiv*"mit auf dem Weg, denn Aussage (1) ist, dass wir jede Funktion durch eine geeignete Korestriktion surjektiv machen können. Aussage (2) ist, dass Injektivität schon ausreicht um durch eine geschickte Korestriktion Bijektivität zu erhalten. Also ist Injektivität im Vergleich zur Surjektivität, was die Erreichbarkeit angeht, die stärkere Eigenschaft.

Im Titel des Satz 2.3.3 steht es schon geschrieben, worum es nun gehen wird: Um die Umkehrfunktion.

Definition 2.3.4 (Umkehrfunktion). *Sei $f\colon A \to B$ eine bijektive Funktion. Dann definieren wir die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to A$ durch:*

$$f^{-1}(y) = x \text{ für } y \in B \text{ für ein } x \in A \text{ mit der Eigenschaft } f(x) = y.$$

Dass diese Definition 2.3.4 wohldefiniert ist, haben wir im Satz 2.3.3(3) gesehen, ebenso die obige Konstruktion.

Folgerung: Die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion ist selber stets bijektiv.

Beweis. Dies besagt der Satz 2.3.3(3). □

Eine letzte Operation wollen wir an dieser Stelle noch einführen und zwar die Verkettung zweier (oder mehrer) Funktionen miteinander.

Definition 2.3.5 (Verkettung von Funktionen). *Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Funktionen. Dann definieren wir die Verkettung $g \circ f$ der Funktionen f und g (gelesen: "g nach f") als die Funktion*

$$g \circ f\colon A \to C,\ x \mapsto g(f(x)).$$

Wir machen uns klar, dass diese Definition wohl-definiert ist, d.h. dass alle auftretenden Objekte tatsächlich definiert sind. Per Definition der Funktion f ist für alle $x \in A$ der Funktionswert $y := f(x)$ in B, d.h. $g(y)$ existiert und liegt in der Menge C; damit ist die Verkettung wohl-definiert.

Ein wichtige Rechenregel für die Verkettung, falls wir mehr als zwei Funktionen miteinander verketten wollen, ist der Satz:

Satz 2.3.6 (Assoziativgesetz für die Verkettung von Funktionen). *Seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ und $h\colon C \to D$ drei Funktionen. Dann gilt:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Beweis. Sei $x \in A$, dann gilt:

$$\begin{aligned}[(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) = [h \circ (g \circ f)](x).\end{aligned}$$

Also ist

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

□

Eine der einfachsten, aber zugleich wichtigsten/ häufig auftretenden Funktionen ist die Identität:

Definition 2.3.7 (Identitätsfunktion)**.** *Sei A eine Menge. Dann ist die* ***Identität auf der Menge*** *A definiert durch die Funktion*

$$\mathrm{Id}_A \colon A \to A,\ a \mapsto a.$$

Bemerkung: Per Definition 2.3.7 der Identität ist diese stets bijektiv.

Nun ergeben sich uns direkt einige Zusammenhänge zwischen Identität und Umkehrfunktion von bijektiven Funktionen:

Satz 2.3.8 (Verkettung zur Identität I)**.** *Sei $f \colon A \to B$ eine bijektive Funktion. Dann gilt:*

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \text{ und } f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B.$$

Beweis. Seien $a \in A$ und $b \in B$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left(f^{-1} \circ f\right)(a) &= f^{-1}(f(a)) = a, \\ \left(f \circ f^{-1}\right)(b) &= f\left(f^{-1}(b)\right) = b\end{aligned}$$

nach der Definition 2.3.4 der Umkehrfunktion f^{-1}, d.h. es ist

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \text{ und } f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B.$$

□

Nun wollen wir an einem Beispiel veranschaulichen, wie wir unteranderem eine Umkehrfunktion berechnen können.

Beispiel 2.3.9 (Umkehrfunktion konkret bestimmen)**.** *Gegeben sei die Funktion*

$$f \colon \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\},\ x \mapsto \frac{x-1}{x+1}.$$

Wir zeigen zuerst, dass die Funktion f bijektiv ist (sonst gebe es keine Umkehrfunktion). Dazu stellen wir fest, dass für $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ gilt:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-1-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

Seien nun $x_1 \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ und $x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Nun gilt dann:

$$\begin{aligned}1 - \frac{2}{x_1+1} &= f(x_1) = f(x_2) = 1 - \frac{2}{x_2+1} \\ \Leftrightarrow\ -\frac{2}{x_1+1} &= -\frac{2}{x_2+1} \\ \Leftrightarrow\ x_1+1 &= x_2+1\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \; x_1 = x_2,$$

d.h. die Funktion f ist injektiv laut Definition 2.2.1. Sei nun $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Dann formen wir um:

$$\begin{aligned} y = f(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \\ \Leftrightarrow \; \frac{2}{x+1} = 1 - y \\ \Leftrightarrow \; \frac{1}{x+1} = \frac{1-y}{2} \\ \Leftrightarrow \; x+1 = \frac{2}{1-y} \\ \Leftrightarrow \; x = \frac{2}{1-y} - 1 = \frac{2-(1-y)}{1-y} = \frac{2-1+y}{1-y} = \frac{1+y}{1-y}. \end{aligned}$$

Weiter ist $x \neq -1$, denn sonst würde gelten:

$$\begin{aligned} -1 = \frac{1+y}{1-y} = \frac{2}{1-y} - 1 \\ \Leftrightarrow \; 0 = \frac{2}{1-y} \\ \Leftrightarrow \; 0 = 2. \end{aligned}$$

Also gilt

$$f\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = y \text{ und } x = \frac{1+y}{1-y} \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

Damit ist die Funktion f surjektiv laut Definition 2.2.1. Nun ist sie auch bijektiv laut Definition 2.2.1 mit der Umkehrabbildung

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{-1\}, y \mapsto \frac{1+y}{1-y}$$

laut Definition 2.3.4.

Abschließen wollen wir mit zwei letzten Sätzen über die Zusammenhänge zwischen den Begriffen aus den bisherigen Abschnitten des zweiten Kapitels, allerdings überlassen wir die Beweise als kleine Übungsaufgabe.

Satz 2.3.10 (Verkettungen mit injektiven, surjektiven und bijektiven Funktionen)**.** *Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Funktionen und $h = g \circ f\colon A \to C$ deren Verkettung. Dann gilt:*

(1) Sind die beiden Funktionen, f und g, injektiv, so ist auch die Funktion h injektiv.

(2) Ist die Restriktion $g|_{f(A)}\colon f(A) \to C$ surjektiv, dann ist auch die Funktion h surjektiv.

(3) Sind die beiden Funktionen, f und g, bijektiv, so ist auch die Funktion h bijektiv mit der Umkehrfunktion $h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Und ein kleines Kriterium für die Begriffe "*injektiv*und "*surjektiv*":

Satz 2.3.11 (Verkettung zur Identität II)**.** *Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion mit $A \neq \emptyset$. Es gelten folgende Kriterien:*

(1) Die Funktion f ist injektiv genau, dann wenn es eine Funktion $g\colon B \to A$ gibt mit der Eigenschaft

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A.$$

(2) Die Funktion f ist surjektiv genau, dann wenn es eine Funktion $g\colon B \to A$ gibt mit der Eigenschaft

$$f \circ g = \mathrm{Id}_B.$$

3 Potenzen, Wurzeln und Beträge

In diesem Kapitel wollen wir so gut es geht die Potenzfunktion einführen, wobei wir uns dabei "nuräuf die gebrochenrationale Potenz konzentrieren werden. In diesem Zusammenhang wird auch die Wurzelfunktion eingeführt und am Ende ebenfalls die wichtige Betragsfunktion. Alles mit ihren Regeln und Eigenschaften.

3.1 Potenzen und Wurzeln

3.1.1 Ganzzahlige Potenzen

Los geht es mit denen, wo die Potenz m in den ganzen Zahlen liegt. Dafür haben wir sogar schon Beispiele gesehen, z.B. in ??.

Definition 3.1.1 (Ganzzahlige Potenz). *Seien $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, dann definieren wir die m**te Potenz von** a durch*

$$a^m := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} \text{ für } m > 0,$$

$$0^m := 0 \text{ für } m > 0 a^m \qquad := \left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = \frac{1}{a^{-m}} \text{ für } m < 0,$$

$$a^0 := 1.$$

*Dabei nennen wir die Zahl a **Basis** und Zahl m den **Exponenten**.*

Bemerkung: Wir haben in der Definition alles definiert bis auf 0^0. Dies lassen wir an dieser Stelle aus, da es da durchaus Probleme geben kann und in den Grundvorlesungen noch mehr dazu gesagt wird.

Es gelten die folgenden Potenzgesetze:

Satz 3.1.2 (Potenzgesetze (für ganzzahlige Potenzen)). *Seien $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ zwei Basen und $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z}$ zwei Exponente. Dann gelten die folgenden Gesetze:*

(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

(2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

(3) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

(4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

(5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Beweis. (Direkter Beweis) Der Beweis erfolgt durch die Fallunterscheidung, ob n oder m gleich null sind und ansonsten durch Ausschreiben der Definition 3.1.1. □

3.1.2 Die $n$te Wurzel

Auch hier ist uns schon ein Beispiel begegnet bzw. es wurde indirekt erwähnt. Im Satz 1.8.1 haben wir gezeigt, dass die Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2 = 2$ nicht rational sein kann und haben dies mit $\sqrt{2}$ benannt. Nun schauen wir uns dies allgemeiner an:

Definition 3.1.3 (Die $n$te Wurzel). *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir für*

- *$a \in [0, \infty)$ die n**te Wurzel aus** a durch die (eindeutige) nicht-negative reelle Lösung x der Gleichung $x^n = a$. Wir schreiben für die $n$te Wurzel aus a auch*

$$\sqrt[n]{a} \text{ oder } a^{\frac{1}{n}}.$$

- *$a \in (-\infty, 0)$, falls n ungerade ist, die n**te Wurzel aus** a durch*

$$\sqrt[n]{a} := -\sqrt[n]{-a}.$$

*Die Zahl a nennen wir das **Radikal**.*

Bemerkung: Bitte beachten, dass es für negative reelle Zahlen a keine reelle $n$te Wurzel gibt, sofern $n \in \mathbb{N}$ gerade ist. Auch machen wir uns hier über die Wohldefiniertheit der Definition keine Sorgen, wir müssten z.B. überprüfen, ob so ein x stets existiert und dann, ob es tatsächlich eindeutig ist. Dies wird aber an geeigneter Stelle in den Grundvorlesungen behandelt und sei hier nur nebenbei erwähnt.

Notation: Wir lassen in der Regel im Fall von $n = 2$ diese bei der Wurzel weg und schreiben anstatt von $\sqrt[2]{\cdot}$ einfach $\sqrt{\cdot}$. Daher kommt es auch vor, dass in unserem Sprachgebrauch wir von der Wurzel reden, wenn wir die 2te Wurzel meinen.

Beispiel 3.1.4 (Lösungen der Gleichung und die Wurzel). *Wir suchen jedes $y \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $y^2 = 4$. Dann ist es klar, dass diese Gleichung nur von*

$$y = -2 \text{ und } y = 2$$

*gelöst wird. **Aber**: Bilden wir $\sqrt{4}$, so erhalten wir nach obiger Definition 3.1.3 "nur"die Lösung 2.*

Beispiel 3.1.5 (Lösung und Wurzel stimmen überein). *Die Zahl $x = -2 = -\sqrt[3]{8}$ ist die eindeutige reelle Lösung der Gleichung*

$$x^3 = -8,$$

demnach ist auch $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Bemerkung: Das obige Beispiel 3.1.4 zeigt auf, dass die Lösung x der Gleichung $x^n = a$ für nicht-negatives a und $n \in \mathbb{N}$ verschiedene Vorzeichen haben kann, aber die $n$te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ aus a ist in diesem Falle stets nicht-negatives (d.h. entweder null oder positiv). Das Beispiel 3.1.5 zeigt auf, dass die Lösung der Gleichungen $x^n = a$ nicht unbedingt verschiedene Vorzeichen haben müssen, in diesen Fällen stimmen Lösung und Wurzel stets überein.

Auch für die $n$te Wurzel gibt es Rechengesetze, diese wollen wir hier ohne Beweis in Erinnerung rufen:

Satz 3.1.6 (Rechengesetze für Wurzeln). *Seien $a \in [0, \infty)$ und $b \in [0, \infty)$, sowie $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

(1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

(2) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, *insbesondere ist* $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$, *sowie, falls $a > 0$ ist, gilt auch:* $\sqrt[n]{a^l} = (\sqrt[n]{a})^l$.

(3) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$*, falls* $b > 0$ *ist.*

(4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$.

Bemerkung: Wichtig, es gilt **<u>nicht</u>** (!) für $a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, dass die Wurzeln additiv sind, also gilt:

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$$

in der Regel. Dies wird am Anfang gerne einmal vergessen und daher falsch gemacht.

Beispiel 3.1.7 (Weitere Beispiele zur Wurzelbestimmung)**.** *Wir nutzen die Rechenregel 3.1.6 für die Wurzeln:*

- $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$ *(nach (1)).*
- $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^10} = 2$ *(nach (2)).*
- $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{128}{2}} = \sqrt{64} = 8$ *(nach (3)).*
- $2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64}$ *(nach (4)).*
- $\sqrt[6]{125} = \sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}$ *(nach (4)).*

Kurz zur Wurzelfunktion:

Definition 3.1.8 (Die $n$te Wurzelfunktion)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}$*. Dann nennen wir die Funktion*

$$\sqrt[n]{\cdot}\colon\ [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

die n***te Wurzelfunktion****.*

Bemerkung: Ist $n = 2$, so nennen wir die Funktion $\sqrt[2]{\cdot}$ nur Wurzelfunktion und schreiben einfacher $\sqrt{\cdot}$.

Satz 3.1.9 (Eigenschaften der Wurzelfunktion)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gilt für das Bild*

$$\sqrt[n]{\cdot}\,([0, \infty)) = [0, \infty)$$

und die Korestriktion der Funktion $\sqrt[n]{\cdot}$ *auf das Bild der* n*ten Wurzelfunktion ist bijektiv mit der Umkehrabbildung*

$$\widetilde{p}_n\colon\ [0, \infty) \to [0, \infty)\,,\ y \mapsto y^n.$$

Beweis. Sei $a \in [0, \infty)$, dann ist $a^n \in [0, \infty)$ und es gilt:

$$\sqrt[n]{\cdot}\,(a^n) = \sqrt[n]{a^n} = a$$

laut dem Satz 3.1.6(2). Andererseits ist für alle $x \in [0, \infty)$:

$$\sqrt[n]{\cdot}(x) = \sqrt[n]{x} \geqslant 0.$$

Damit gilt für das Bild der $n$ten Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot}$ nach Definition 2.1.2:

$$\sqrt[n]{\cdot}\,([0, \infty)) = [0, \infty)\,.$$

Seien nun $x_1 \in [0, \infty)$ und $x_2 \in [0, \infty)$ mit

$$\sqrt[n]{\cdot}\,(x_1) = \sqrt[n]{\cdot}\,(x_2)\,,$$

dann gilt durch "*Potenzieren*":

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x_1} &= \sqrt[n]{\cdot}\,(x_1) = \sqrt[n]{\cdot}\,(x_2) = \sqrt[n]{x_2} \\ \Leftrightarrow\; x_1 &= \left(\sqrt[n]{x_1}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x_2}\right)^n = x_2 \end{aligned}$$

laut Satz 3.1.6(2), wobei wir das nur dürfen, da die auftretenden $n$ten Wurzeln positiv sind. Nach Definition 2.2.1 ist nun die $n$te Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot}$ injektiv. Nun folgt aus dem Satz 2.3.3(2), dass die Korestriktion der $n$ten Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot}$ auf das Bild dieser bijektiv ist. Sei nun $y \in [0, \infty)$ und setze $x = y^n \in [0, \infty)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x} &= \sqrt[n]{y^n} = y \text{ nach 3.1.6(2)}, \\ \widetilde{p}_n(y) &= y^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \text{ nach 3.1.6(2)}, \end{aligned}$$

d.h. dass die Funktion $\widetilde{p}_n$ die Umkehrfunktion der Korestriktion der $n$ten Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot}$ auf der Menge $[0, \infty)$ ist. □

3.1.3 Rationale Potenzen

Definition 3.1.10 (Rationale Potenzen)**.** *Seien $a \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{p}{q}$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ sind. Dann definieren wir die **rationale** oder die **gebrochenrationale Potenz** a^r durch*

$$a^r := \left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

und falls $r \neq 0$ ist auch $0^r := 0$.

Wir sollten an dieser Stelle einmal die Wohldefiniertheit der obigen Definition 3.1.10 begründen:

Satz 3.1.11 (Wohldefiniertheit der rationalen Potenz)**.** *Seien $a \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit den Darstellungen $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, wobei $p, m \in \mathbb{Z}$ und $q, n \in \mathbb{N}$ sind. Dann gilt:*

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Beweis. Ist $r = 0$, so muss $p = 0 = m$ sein und wegen $a > 0$ ist auch $a^{\frac{1}{q}} > 0$ bzw. $a^{\frac{1}{n}} > 0$, d.h. nach Definition 3.1.1 der (ganzzahligen) Potenz gilt:

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^0 = 1 = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^0 = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Falls $r \neq 0$ ist (d.h. $p \neq 0 \neq m$), so gilt:

$$1 = \frac{r}{r} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{m}{n}} = \frac{np}{mq} \;\Leftrightarrow\; np = mq.$$

In diesem Fall erhalten wir ebenfalls:

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p &= \left(\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{np}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mq}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, \end{aligned}$$

wobei wir die Rechenregeln 3.1.6(2) ausgenutzt haben. □

Bemerkung: Damit ist die a^r eindeutig definiert (für alle $a \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{Q}$), und die obige Definition 3.1.10 ist wohldefiniert.

Wir erhalten analog zu den Rechengesetzen für die Wurzel und die für die ganzzahligen Exponente vergleichbare Rechengesetze für die rationale Potenz:

Satz 3.1.12 (Rechenregeln rationale Potenzen). *Seien $a \in (0, \infty)$ und $b \in (0, \infty)$, sowie $r \in Q$ und $s \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:*

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

(2) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

(3) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$.

(4) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$.

(5) $(a^r)^s = a^{rs}$.

Ein paar Beispiele zum Arbeiten mit rationalen Potenzen bzw. mit Wurzeln:

Beispiel 3.1.13 (*"Rationalmachen"* des Nenners). *(1) Seien $a \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Liegt uns ein Term der Form*

$$\frac{b}{a^{\frac{m}{n}}}$$

vor, so kann es manchmal hilfreich sein, diesen mit $a^{1-\frac{m}{n}}$ zu erweitern zu der Form

$$\frac{a^{1-\frac{m}{n}} b}{a}.$$

Zum Beispiel: ($b = 1$, $a = 2$, $n = 3$ und $m = 2$)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2^1} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2},$$

wobei wir den Satz 3.1.12(1) und den Satz 3.1.6(2) genutzt haben.

(2) Seien $a, b \in [0, \infty)$ mit $a \neq b$ und $c \in \mathbb{R}$. Liegt uns ein Term der Form

$$\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

vor, so kann es manchmal hilfreich sein, diesen per binomischer Formel mit $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ zu erweitern zu der Form:

$$\frac{c\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{a - b}.$$

Zum Beispiel: ($a = 2$, $b = 3 \neq 2 = a$ und $c = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})\,(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \end{aligned}$$

wobei wir die binomische Formel und den Satz 3.1.6(2) ausgenutzt haben.

Bemerkung: Das Beispiel 3.1.13(2) funktioniert auch andersrum, manchmal möchten wir von einer Form

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

etwas aussagen, allerdings wie wir schon oben einmal bemerkt haben gilt in der Regel **nicht**:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b}.$$

Daher tuen wir etwas ähnliches wie in Beispiel 3.1.13(2), indem wir mit $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ erweitern und so die Form

$$\frac{a-b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$$

erhalten.

3.1.4 Die rationale Potenzfunktion

Definition 3.1.14 (Die rationale Potenzfunktion und die konstante Eins-Funktion)**.** *Sei $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Wir nennen die Funktion*

$$f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^r$$

*die **rationale Potenzfunktion zur Potenz** r, wobei der Definitionsbereich X je nach r variiert:*

- *Ist $r \in \mathbb{N}$, so $X = \mathbb{R}$.*
- *Ist $r \in \mathbb{Z}$ mit $r \in (-\infty, -1]$, so ist $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
- *Ist $r \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$, so ist $X = [0, \infty)$.*
- *Ist $r \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}$, so ist $X = (0, \infty)$.*

Wir nennen die Funktion

$$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$$

*die **konstante Eins-Funktion**.*

Bemerkung: Warum wir in der Definition 3.1.14 nicht die Potenzfunktion für $r = 0$ definiert haben, liegt einfach daran, dass wir nicht über 0^0 reden wollen. Im Grunde wird aber in diesem Falle die Potenzfunktion gleich der konstanten Eins-Funktion gesetzt, dazu aber mehr in den Grundvorlesungen.

Beispiel 3.1.15 (Monome und Polynome)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen die Funktion*

$$p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$$

*das n**te Monom** und*

$$p_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$$

*das 0**te Monom**. Aus diesen lassen sich mit Hilfe von Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ eine neue Art der Funktionen bilden, und zwar Funktionen der Form*

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

*die sogenannten **Polynome vom Grad** n. Für so ein Polynom p vom Grad n gilt daher, dass es aus den Monomen zusammengesetzt ist:*

$$p(x) = a_n p_n(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x) + \ldots + a_1 p_1(x) + a_0 p_0(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Diese Monome sind uns in diesen Abschnitt schon einmal über den Weg gelaufen beim Satz 3.1.9 über die Umkehrfunktion der Korestriktion der $n$ten Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot}$. Dort hieß die Umkehrfunktion gerade $\widetilde{p}_n$ und die Bezeichnung kommt nicht von irgendwo, denn es gilt, dass die Korestriktion der Einschränkung $p_n|_{[0,\infty)}$ auf die Menge $[0, \infty)$ gerade $\widetilde{p}_n$ ist.

3.2 Die Betragsfunktion

Definition 3.2.1 (Die Betragsfunktion). *Wir definieren zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ den **Betrag von** a durch*

$$|a| := \begin{cases} a \text{ für } a \geqslant 0 \\ -a \text{ für } a < 0. \end{cases}$$

Zudem nennen wir wie Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$$

*die **Betragsfunktion**.*

Bevor wir auf Beispiele eingehen, wollen wir einige grundlegende Eigenschaften vom Betrag aufzählen, allerdings ohne Beweis, da dies in der Grundvorlesung zur Analysis geschehen wird.

Satz 3.2.2 (Eigenschaften vom Betrag). *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, sowie $\lambda \in [0, \infty)$. Dann gilt:*

*(1) **Positivität**: $|a| \geqslant 0$.*

*(2) **Definitheit**: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.*

*(3) **Multiplikativität**: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, insbesondere ist der Betrag **homogen von Grad** 1: $|\lambda a| = \lambda\, |a|$.*

*(4) **Dreiecksungleichung**: $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$.*

*(5) **Umgekehrte Dreiecksungleichung**: $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b|$.*

Bemerkung: Wir können uns den Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ als den Abstand zwischen dem Nullpunkt und a vorstellen, demnach entspricht $|a - b|$ für $a, b \in R$ dem Abstand zwischen a und b.

Beispiel 3.2.3. *(1) $|-3| = -(-3) = 3$, sowie $|3| = 3$.*

(2) $|0| = 0$.

(3) $\sqrt{x^2} = |x|$ und $|x|^2 = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Das Beispiel 3.2.3(3) gibt uns eine alternative Definition vom Betrag einer Zahl.

Der Betrag wird uns noch im nächsten Kapitel 4 öfters begegnen.

4 Lösungstechniken für Gleichungen und Ungleichungen

In der Schule, wie vielleicht auch in der Ausbildung und auch im Studium spielt das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen eine wichtige Rolle, d.h. für welche Werte ist meine Gleichung bzw. Ungleichung erfüllt und für welche eben nicht. Dabei ist es oftmals entscheidend, was wir für Werte zulassen. Beispielsweise ist wahrscheinlich der "*Satz des Pythagoras*"bekannt, welcher für die drei Seiten a, b und c eines rechtwinkligen Dreiecks besagt, dass

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ist. Nehmen wir diese Gleichung und fragen uns, wann diese erfüllt ist. Aber aus welcher Menge stammen nun a, b und c. Es macht hierbei einen deutlichen Unterschied, ob wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ nehmen oder $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Also ähnlich wie der Definitionsbereich zu Funktionen gehört hat, gehört eben auch die Angabe der Menge dazu aus der die gesuchte(n) Variablen stammen.

Ein erstes kleines Beispiel für den typischen Aufbau einer Aufgabe könnte sein: **Beispiel**: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, welche die Gleichung

$$\frac{1}{x-1} = 1$$

erfüllen.

Bei Angabe der entsprechenden Menge für unsere gesuchte Zahl x ist es außerdem notwendig, dass der jeweilige Ausdruck/ Term definiert ist, d.h. in dem oberen Beispiel wäre $x \in \mathbb{R}$ nicht zulässig. Sowie oben schon gesagt, wäre auch nur die Gleichung

$$\frac{1}{x-1} = 1$$

nicht aussagekräftig.

Bearbeiten wir nun das Beispiel: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow\ 1 &= x - 1 \\ \Leftrightarrow\ x &= 2 \end{aligned}$$

und $2 \neq 1$. Damit ist die Menge aller $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, die die Gleichung

$$\frac{1}{x-1} = 1$$

erfüllen, gegeben durch

$$\mathbb{L} := \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid \frac{1}{x-1} = 1 \right\} = \{2\}.$$

Wir bezeichnen mit $\mathbb{L}$ stets die **Lösungsmenge**.

4.1 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen sind erstmal Gleichungen, wo die gesuchte(n) Variable(n) innerhalb des Betrags stehen. Dann ist es in der Regel notwendig eine Fallunterscheidung zu machen, ob der auftretende Term im Betrag positiv oder negativ ist.

Wir erläutern dies anhand eines Beispiels, weitere folgen in den Abschnitten **??** und **??**, da auch das Vorgehen bei Betragsungleichungen relativ ähnlich ist.

Beispiel 4.1.1. *Wir bestimmen alle* $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ *mit*

$$\frac{|2x+1|}{x-3} = 1.$$

Wir formen erstmal für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ *den Ausdruck um:*

$$\begin{aligned} \frac{|2x+1|}{x-3} &= 1 \\ \Leftrightarrow\ |2x+1| &= x-3. \end{aligned}$$

Nun folgt die Fallunterscheidung, ob der Term innerhalb des Betrages nicht-negativ oder negativ ist.
Fall 1. $2x+1 \geqslant 0$*: Dann gilt:*

$$\begin{aligned} 2x+1 = |2x+1| &= x-3 \\ \Leftrightarrow\ x+1 &= -3 \\ \Leftrightarrow\ x &= -4 \end{aligned}$$

und $-4 \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$*, aber es gilt:*

$$2\cdot(-4)+1 = -8+1 = -7 < 0,$$

demnach ist $x=-4$ *keine zulässige Lösung.*
Fall 2. $2x+1 < 0$*: Dann gilt:*

$$\begin{aligned} -2x-1 = -(2x+1) = |2x+1| &= x-3 \\ \Leftrightarrow\ -3x-1 &= -3 \\ \Leftrightarrow\ -3x &= -2 \\ \Leftrightarrow\ x &= \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

und $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$*, aber es gilt:*

$$2\cdot\frac{2}{3}+1 = \frac{4}{3}+1 = \frac{4+3}{3} = \frac{7}{3} \geqslant 0,$$

demnach ist $x=\frac{2}{3}$ *keine zulässige Lösung. Damit lautet nun die Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ *der obigen Betragsgleichung*

$$\mathbb{L} := \left\{ x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} : \frac{|2x+1|}{x-3} = 1 \right\} = \{\} = \varnothing.$$

4.1.1 Quadratische Gleichungen

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Unter einer quadratischen Gleichung verstehen wir eine Gleichung der Form:

$$ax^2+bx+c = 0 \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

In der Schule wurden solche Gleichungen auch schon betrachtet, damals haben wir die "*Mitternachtsformel*öder die "*p-q-Formel*ßum Lösen derartiger Gleichungen kennengelernt. Die Lösung einer solchen Gleichung erhalten wir also durch den folgenden Satz:

Satz 4.1.2 (Mitternachtsformeln). *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b^2 \geqslant 4ac$. Dann lautet ist die Lösung $x \in \mathbb{R}$ der quadratischen Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gegeben durch die Mitternachtsformeln:

$$x_1 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ und } x_2 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Direkter Beweis, Fallunterscheidung. Da die Zahl $a \neq 0$ ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ durch "*quadratisches Ergänzen*" bzw. binomische Formel:

$$\begin{aligned}
0 = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)& \\
\Leftrightarrow\ 0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b}{2a}x - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b}{a}x - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
\Leftrightarrow\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
\Leftrightarrow\ \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\left(x + \frac{b}{a}\right)^2} &= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,|a|}
\end{aligned}$$

laut dem Beispiel 3.2.3(3) und dem Satz 3.1.6(3), wobei die Wurzel definiert ist, da wir gefordert haben, dass $b^2 \geqslant 4ac$ ist. Nun haben wir unser Problem auf eine Betragsgleichung reduziert.

(**Bemerkung**: Im letzten Abschnitt 4.1 haben wir gelernt, wie wir diese lösen können. Hier benötigen wir nun vier verschiedene Fälle, da wir zwei Beträge haben.)

Wir machen eine Fallunterscheidung:
<u>Fall 1.</u> $x + \frac{b}{2a} \geqslant 0$ und $a \geqslant 0$: Dann gilt:

$$\begin{aligned}
x + \frac{b}{2a} = \left|x + \frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Leftrightarrow\ x &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

<u>Fall 2.</u> $x + \frac{b}{2a} \geqslant 0$ und $a < 0$: Dann gilt:

$$\begin{aligned}
x + \frac{b}{2a} = \left|x + \frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} \\
\Leftrightarrow\ x &= -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

<u>Fall 3.</u> $x + \frac{b}{2a} < 0$ und $a \geqslant 0$: Dann gilt:

$$\begin{aligned}
-\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \left|x + \frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Leftrightarrow\ x + \frac{b}{2a} &= -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Leftrightarrow\ x &= -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Fall 3. $x + \frac{b}{2a} < 0$ und $a < 0$: Dann gilt:

$$\begin{aligned} -\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \left|x + \frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} \\ \Leftrightarrow\ x + \frac{b}{2a} &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow\ x &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösungsmenge für die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

als

$$\mathbb{L} := \left\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\} = \left\{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\} = \{x_1,\ x_2\}.$$

□

Bemerkung: Wir schreiben in der Regel verkürzt für die Mitternachtsformeln:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

sofern $a \neq 0$ und $b^2 \geqslant 4ac$ gilt.

Allerdings steht noch der Fall aus, wenn $b^2 < 4ac$.

Satz 4.1.3 (Keine (reelle) Lösung der quadratischen Gleichung)**.** *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b^2 < 4ac$. Dann existiert kein $x \in \mathbb{R}$ welches die quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

löst, d.h. die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist leer ($\mathbb{L} = \varnothing$).

Widerspruchsbeweis. Annahme: Es gebe eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.
Dann gilt für dieses x, da die Zahl $a \neq 0$ ist, durch "*quadratisches Ergänzen*" bzw. binomische Formel:

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ \Leftrightarrow\ 0 &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b}{2a}x - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b}{a}x - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \Leftrightarrow\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0,$$

allerdings ist

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$$

wegen der Bedingung, dass $b^2 < 4ac$. Also haben wir den Widerspruch

$$0 \geqslant \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0,$$

und daher war die Annahme falsch. Es gibt also kein Element $x \in \mathbb{R}$, welches die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ löst. □

Bemerkung: Zusammenfassend können wir somit sagen, dass wir drei verschiedene Fälle haben können für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\mathbb{L} = \varnothing \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac,$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\} \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac,$$

$$\mathbb{L} \text{ hat genau zwei verschiedene Elemente } x_1 \text{ und } x_2 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow b^2 > 4ac.$$

Beispiel 4.1.4. *Wir bestimmen alle $x \in \mathbb{R}$ mit*

$$x^2 - x - 7 = -1.$$

Wir stellen dies erstmal auf die gewünschte Form um so, dass wir den Satz 4.1.2 oder den Satz 4.1.3 anwenden können. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - x - 7 = -1 \qquad \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0.$$

Hier haben wir nun $a = 1,\ b = -1$ und $c = -6$. Also gilt schon mal $a = 1 \neq 0$ und

$$b^2 = (-1)^2 = 1 > -24 = 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 4ac,$$

d.h. wir sind im Fall von Satz 4.1.2 und können zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2 erwarten. Es gilt laut der Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Die Lösungsmenge lautet also nach dem Satz 4.1.2:

$$\mathbb{L} := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 = -1\right\} = \left\{\frac{1-5}{2},\ \frac{1+5}{2}\right\} = \left\{\frac{-4}{2},\ \frac{6}{2}\right\} = \{-2,\ 3\}.$$

4.2 Wurzelgleichungen

Es ist schwer eine allgemein-gültige Definition für so eine Art von Gleichung anzugeben, aber grob gesagt, befinden sich die Variablen, nach denen wir auflösen sollen, innerhalb von Wurzeln. Im Regelfall sind bei diesen Gleichungen auch stets Einschränkungen (d.h. nicht mehr alle reellen Zahlen sind zugelassen) an unsere Variablen gegeben. Wir erläutern das Vorgehen anhand von zwei Beispielen.

Beispiel 4.2.1 (Wurzelgleichungen). *(1) Wir bestimmen alle $x \in [-2, \infty)$ mit*

$$7 + 3\sqrt{2x + 4} = 16.$$

*(**Bemerkung**: Wir bemerken hier, dass der Bereich $[-2, \infty)$ so gewählt ist, dass die Wurzel $\sqrt{2x + 4}$ wohldefiniert ist für alle $x \in [-2, \infty)$) Wir haben für $x \in [-2, \infty)$:*

$$7 + 3\sqrt{2x + 4} = 16 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x + 4} = 9$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{2x+4} = 3 \\
&\Leftrightarrow 2x+4 = |2x+4| = \sqrt{(2x+4)^2} = \sqrt{2x+4}^2 = 3^2 = 9 \\
&\Leftrightarrow 2x = 5 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

wegen

$$2x+4 \geqslant 2\cdot(-2)+4 = -4+4 = 0,\ \sqrt{2x+4} \geqslant 0 \textit{ und } 3 \geqslant 0$$

für alle $x \in [-2,\infty)$. Also gilt für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} := \left\{x \in [-2,\infty) \mid 7+3\sqrt{2x+4} = 16\right\} = \left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

(2) *Wir bestimmen alle $x \in [1,\infty)$ mit*

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}.$$

***Bemerkung**: Wir bemerken, dass alle auftretenden Wurzeln wohldefiniert sind, da für alle $x \in [1,\infty)$ gilt:*

$$x \geqslant 1 > 0,\ x-1 \geqslant 1-1 = 0 \textit{ und } 2x-1 \geqslant 2\cdot 1 - 1 = 2-1 = 1 > 0.$$

Wir haben für $x \in [1,\infty)$:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1} &\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)^2 = \sqrt{2x-1}^2 = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = 2x-1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2} - 2\sqrt{x}\sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}^2 = 2x-1 \\
&\Leftrightarrow 2x-1-2\sqrt{x(x-1)} = x - 2\sqrt{x(x-1)} + x - 1 \\
&\qquad\quad = |x| - 2\sqrt{x(x-1)} + |x-1| = 2x-1 \\
&\Leftrightarrow -2\sqrt{x(x-1)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x(x-1)} = 0 \\
&\Leftrightarrow x(x-1) = |x|\,|x-1| = |x(x-1)| = \sqrt{[x(x-1)]^2} \\
&\qquad\quad = \sqrt{x(x-1)}^2 = 0^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow [x = 0 \textit{ oder } x = 1] \\
&\Leftrightarrow x = 1,
\end{aligned}
$$

da der Wert $x = 0 \notin [1,\infty)$ ist und wegen $x \geqslant 0$ und $x-1 \geqslant 0$. Da wir an einer Stelle keine Äquivalenz haben, sondern nur eine Implikation, müssen wir unseren möglichen Wert $x = 1$ noch überprüfen:

$$\sqrt{1} - \sqrt{1-1} = 1 - \sqrt{0} = 1 - 0 = 1 = \sqrt{1} = \sqrt{2-1} = \sqrt{2\cdot 1 - 1}.$$

Folglich gilt für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{x \in [1,\infty) \mid \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}\right\} = \{1\}.$$

Bemerkung: Warum haben wir in Beispiel 4.2.1(2) an einer Stelle keine Äquivalent, sondern nur eine Implikation? Der Grund ist, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. Wäre es eine, dann wäre $-1 = 1$, denn es würde gelten:

$$-1 = 1 \Leftrightarrow 1 = (-1)^2 = 1^2 = 1,$$

was nicht sein kann. Damit ist Quadrieren keine Äquivalenzumformung und wir erhalten stets nur eine Implikation. Eine Ausnahme ist aber, wenn wir wissen, dass beide Seiten nicht-negativ sind wie z.B. in Beispiel 4.2.1(1) oder auch am Ende der Beweiskette von Beispiel 4.2.1(2).

4.3 Quadratische Ungleichungen

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Unter einer quadratischen Ungleichung verstehen wir eine Ungleichung der Form

$$ax^2 + bx + c \left\{ \begin{array}{c} \geqslant \\ \leqslant \\ > \\ < \end{array} \right\} 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$. Zum Lösen einer solchen Ungleichung gehen wir dabei ähnlich wie bei quadratischen Gleichungen in Abschnitt **??** vor, wir lösen erstmal die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $x \in \mathbb{R}$, falls möglich. Hierbei kann ebenfalls, wie bei quadratischen Gleichungen auch, die Lösungsmenge leer sein, andere mögliche Fälle sind ein Intervall oder die Vereinigung zweier disjunkter Intervalle (d.h. dass der Schnitt beider Intervalle leer ist).

Wir erklären das genaue Vorgehen anhand zweier Beispiele:

Beispiel 4.3.1. *(1) Wir bestimmen alle $x \in \mathbb{R}$ mit*

$$x^2 - x - 7 > -1.$$

Zu aller erst bringen wir dies in die gewünschte Form:

$$x^2 - x - 7 > -1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 6 > 0.$$

Nun haben wir $a = 1,\ b = -1$ und $c = -6$. Als nächstes Lösen wir die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 6 = 0 \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Laut Beispiel 4.1.4 ist diese gegeben durch $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$. Somit erhalten wir die Faktorisierung

$$x^2 - x - 6 = (x - (-2)) \cdot (x - 3) = (x + 2)(x - 3)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Demnach erhalten wir per Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 > 0 \;&\Leftrightarrow\; (x+2)(x-3) > 0 \\ &\Leftrightarrow\; [(x + 2 < 0 \wedge x - 3 < 0) \vee (x + 2 > 0 \wedge x - 3 > 0)] \\ &\Leftrightarrow\; [(x < -2 \wedge x < 3) \vee (x > -2 \wedge x > 3)] \\ &\Leftrightarrow\; [(x < -2) \vee (x > 3)] \\ &\Leftrightarrow\; [(x \in (-2, \infty)) \vee (x \in (3, \infty))] \\ &\Leftrightarrow\; x \in (-2, \infty) \cup (3, \infty). \end{aligned}$$

Also lautet die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 7 > -1 \right\} = (-2, \infty) \cup (3, \infty).$$

(2) Wir bestimmen alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$x^2 + x + 1 \leqslant 0.$$

Hier haben wir $a = 1,\ b = 1$ und $c = 1$. Wieder betrachten wir die quadratische Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$. Es fällt auf, dass $a = 1 \neq 0$ und

$$b^2 = 1^2 = 1 < 4 = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4ac$$

ist, d.h. nach Satz 4.1.3 existiert keine Lösung $x \in \mathbb{R}$ der quadratischen Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Das heißt nun, dass entweder

$$x^2 + x + 1 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ ist oder } x^2 + x + 1 < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dies finden wir mit einer Punktprobe heraus, wir setzen dazu einfach x als irgendeinen Wert aus $\mathbb{R}$ und schauen uns an, welches Vorzeichen das Ergebnis hat. Z.B. $x = 0$, dann ist

$$x^2 + x + 1 = 0^2 + 0 + 1 = 0 + 1 = 1 > 0.$$

Also muss $x^2 + x + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet andererseits für die Lösungsmenge unseres Beispiels, dass

$$\mathbb{L} := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \leqslant 0\right\} = \{\} = \emptyset$$

gilt.

4.4 Bruch(un)gleichungen

Im Grunde haben wir am Anfang dieses Kapitel 4 schon ein Beispiel für eine Bruchgleichung kennengelernt. Gleichungen und Ungleichungen unterscheiden sich nur dadurch, dass wir bei Ungleichungen in der Regel eine Fallunterscheidung vornehmen müssen und bei Gleichungen bleibt uns dies erspart. Rest des Weges ist relativ vergleichbar.

Wir erklären das Vorgehen für Bruchungleichungen anhand eines Beispiels, für Gleichungen siehe das Beispiel am Anfang des Kapitels 4.

Beispiel 4.4.1 (Bruchungleichung). *Wir bestimmen alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ mit*

$$\frac{2x+1}{x-3} < 1.$$

Wegen $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ ist stets $x - 3 \neq 0$. Wir machen also die Fallunterscheidung ob der Term $x - 3$ positiv oder negativ ist, sei nun $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$.
<u>Fall 1.</u> $x - 3 > 0$: Dann ist

$$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in (3, \infty).$$

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-3} < 1 &\Leftrightarrow 2x + 1 < x - 3 \\ &\Leftrightarrow x + 1 < -3 \\ &\Leftrightarrow x < -4. \end{aligned}$$

Wegen $x > 3$ kann $x < -4$ nicht gelten, d.h. in diesem ersten Fall gibt es keine Lösung für die obige Ungleichung.
<u>Fall 2.</u> $x - 3 < 0$: Dann ist

$$x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3).$$

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-3} < 1 &\Leftrightarrow 2x + 1 > x - 3 \\ &\Leftrightarrow x + 1 > -3 \\ &\Leftrightarrow x > -4 \\ &\Leftrightarrow x \in (-4, 3), \end{aligned}$$

da insbesondere $x < 3$ ist. Damit gilt für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} := \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \mid \frac{2x+1}{x-3} < 1\right\} = \emptyset \cup (-4, 3) = (-4, 3).$$

4.5 Betragsungleichungen

Die letzte Art von Ungleichungen, die wir innerhalb dieses Vorkurses betrachten wollen, sind die Betragsungleichungen. Analog wie zuvor sind dies Ungleichungen, wo die gesuchten Variablen innerhalb eines Betrages stehen (vergleiche auch mit dem Abschnitt 4.1). Wir erläutern das Vorgehen anhand von einem Beispiel. Der wesentliche Unterschied, im Gegensatz zu dem Beispiel 4.1.1 der Betragsgleichung, wird sein, dass wir gegebenenfalls mehr Fälle unterscheiden müssen.

Beispiel 4.5.1 (Betragsungleichung). *Wir bestimmen alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mit*

$$\frac{|2x+1|}{x-3} \leqslant 1.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2x+1 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 2x \geqslant -1 \;\Leftrightarrow\; x \geqslant -\frac{1}{2}$$

und

$$x-3>0 \;\Leftrightarrow\; x>3.$$

Damit unterscheiden wir die drei Fälle, ob sich x im Intervall $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left[-\frac{1}{2}, 3\right)$ oder im Intervall $(3, \infty)$ befindet.

<u>Fall 1.</u> $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$: Dann ist insbesondere $x < -\frac{1}{2} \leqslant 3$ und so auch $x-3<0$ bzw. $3-x>0$, sowie $2x+1<0$. Wir haben daher

$$\begin{aligned} \frac{|2x+1|}{x-3} \leqslant 1 \;&\Leftrightarrow\; \frac{2x+1}{3-x} = \frac{-(2x+1)}{x-3} \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow\; 2x+1 \leqslant 3-x \\ &\Leftrightarrow\; 3x+1 \leqslant 3 \\ &\Leftrightarrow\; 3x \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow\; x \leqslant \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass für alle $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ die Ungleichung

$$\frac{|2x+1|}{x-3} \leqslant 1$$

erfüllt ist.

<u>Fall 2.</u> $x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right)$: Dann ist insbesondere $x<3$ und so auch $x-3<0$, allerdings ist wegen $x \geqslant -\frac{1}{2}$ dafür $2x+1 \geqslant 0$. Wir haben daher

$$\begin{aligned} \frac{|2x+1|}{x-3} \leqslant 1 \;&\Leftrightarrow\; \frac{2x+1}{x-3} \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow\; 2x+1 \geqslant x-3 \\ &\Leftrightarrow\; x+1 \geqslant -3 \\ &\Leftrightarrow\; x \geqslant -4. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right)$ die Ungleichung

$$\frac{|2x+1|}{x-3} \leqslant 1$$

erfüllt ist.

<u>Fall 3.</u> $x \in (3, \infty)$: Dann ist $x > 3 \geqslant -\frac{1}{2}$ und daher auch $x-3>0$, sowie $2x+1 \geqslant 0$. Wir haben daher

$$\frac{|2x+1|}{x-3} \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x+1}{x-3} \leqslant 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 2x+1 \leqslant x-3\\
&\Leftrightarrow\ x+1 \leqslant -3\\
&\Leftrightarrow\ x \leqslant -4.
\end{aligned}$$

Es existiert kein $x \in \mathbb{R}$ mit den beiden Eigenschaften $x > 3$ und $x \leqslant -4$, daher ist für kein $x \in (3, \infty)$ die Ungleichung

$$\frac{|2x+1|}{x-3} \leqslant 1$$

erfüllt.
Als Lösungsmenge ergibt sich damit

$$\mathbb{L} := \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} : \frac{|2x+1|}{x-3} \leqslant 1\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, 3\right) \cup \{\} = (-\infty, 3) \cup \varnothing = (-\infty, 3)\,.$$