UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2008
15.03.2008

Wahrscheinlichkeitstheorie
für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen
Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Lösungsvorschläge

Lösung 1

a) i) Aufgrund der Unabhängigkeit von A_1, A_2, A_3 gilt

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p_1\, p_2\, p_3 = \frac{1}{500}$$

sowie

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = p_1 + p_2 - p_1\, p_2 = \frac{19}{100}.$$

ii) Es ist $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Verwendet man an der mit (+) gekennzeichneten Stelle die Unabhängigkeit von A_1, A_2, A_3, so erhält man

$$\begin{aligned}
P(B) &= P\big((A_1 \cup A_2) \cup A_3\big) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P\big((A_1 \cup A_2) \cap A_3\big) \\
&= \frac{19}{100} + P(A_3) - \big(P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\big) \\
&\overset{(+)}{=} \frac{19}{100} + p_3 - p_1\, p_3 - p_2\, p_3 + p_1\, p_2\, p_3 = \frac{19}{100} + \frac{1}{5} - \frac{2}{50} + \frac{1}{500} \\
&= \frac{95 + 100 - 20 + 1}{500} = \frac{176}{500} = \frac{44}{125}.
\end{aligned}$$

iii) Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A_1 \,|\, B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)}{P(B)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{125}{44} = \frac{25}{88}.$$

iv) Wegen $P(A_1 \,|\, B) = \frac{25}{88} \neq \frac{1}{10} = P(A_1)$ sind die Ereignisse A_1 und B nicht unabhängig.

b) Sind die Ereignisse R_1, R_2 gemäß

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \{\text{Die erste gezogene Kugel ist rot}\}, \\
R_2 &:= \{\text{Die zweite gezogene Kugel ist rot}\}
\end{aligned}$$

definiert, dann ergeben sich die folgenden Werte unmittelbar aus der Aufgabenstellung

$$P(R_1) = \frac{1}{3}, \qquad P(\overline{R_1}) = \frac{2}{3}, \qquad P(R_2 \,|\, R_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \qquad P(R_2 \,|\, \overline{R_1}) = \frac{3}{10}.$$

Mit Hilfe der Formel von Bayes erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot ist, wenn die zweite gezogene Kugel rot ist:

$$\begin{aligned}
P(R_1 \,|\, R_2) &= \frac{P(R_2 \,|\, R_1)\, P(R_1)}{P(R_2 \,|\, R_1)\, P(R_1) + P(R_2 \,|\, \overline{R_1})\, P(\overline{R_1})} \\
&= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Lösung 2

a) Es ist

$$p = P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 \geq 2) = 1 - \frac{14}{20} = \frac{3}{10}.$$

b) Der Erwartungswert von X_1 beträgt

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X_1 = k) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{3}{20} + 3 \cdot \frac{3}{20} + 4 \cdot \frac{3}{20} + 5 \cdot \frac{3}{20} + 6 \cdot \frac{2}{20} \\ &= \frac{6+6+9+12+15+12}{20} = \frac{60}{20} = 3. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X_1 = k) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{3}{20} + 9 \cdot \frac{3}{20} + 16 \cdot \frac{3}{20} + 25 \cdot \frac{3}{20} + 36 \cdot \frac{2}{20} \\ &= \frac{6+12+27+48+75+72}{20} = \frac{240}{20} = 12 \end{aligned}$$

ergibt sich für die Varianz von X_1

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 3.$$

c) Einzig für $k = 3$ sind sowohl $P(X_1 < k) \leq \frac{1}{2}$ als auch $P(X_1 > k) \leq \frac{1}{2}$ erfüllt.

d) **i)** Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sind unabhängig und identisch verteilt. Aufgrund von $E(X_1) = 3$, $D^2(X_1) = 3$ folgt mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} P\left(\sum_{j=1}^{N} X_j \leq 3N - \sqrt{3N}\right) &= \lim_{N\to\infty} P\left(\frac{\sum_{j=1}^{N} X_j - 3N}{\sqrt{3N}} \leq -1\right) \\ &= \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587. \end{aligned}$$

ii) Das Chintschinsche Gesetz der großen Zahlen liefert

$$\begin{aligned} 0 &\leq P\left(\sum_{j=1}^{N} X_j \geq \frac{7}{2} N\right) = 1 - P\left(\sum_{j=1}^{N} X_j < \frac{7}{2} N\right) = 1 - P\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j - 3 < \frac{1}{2}\right) \\ &\leq 1 - P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j - 3\right| < \frac{1}{2}\right) \longrightarrow 1 - 1 = 0 \qquad \text{für } N \to \infty. \end{aligned}$$

Demnach ist $\lim\limits_{N\to\infty} P\left(\sum_{j=1}^{N} X_j \geq \frac{7}{2} N\right) = 0.$

Lösung 3

a) **i)** Die zugehörige Übergangsmatrix P lautet

$$P = \begin{pmatrix} p & 2q & 0 \\ p & q & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Offensichtlich gilt $P(X_3 = 2 \,|\, X_1 = 3) = 0$. Die anderen Wahrscheinlichkeiten können auf die folgende Weise bestimmt werden

$$\Big(P(X_2 = 1 \,|\, X_0 = 2), P(X_2 = 2 \,|\, X_0 = 2), P(X_2 = 3 \,|\, X_0 = 2)\Big) = \Big(0, 1, 0\Big)\, P^2$$

$$= \Big(0, 1, 0\Big) \begin{pmatrix} p^2 + 2pq & 2pq + 2q^2 & 2q^2 \\ p^2 + pq & 2pq + q^2 & q^2 + q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Big(p^2 + pq,\, 2pq + q^2,\, q^2 + q\Big).$$

Demnach sind

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1 \,|\, X_0 = 2) &= p^2 + pq, \\ P(X_2 = 2 \,|\, X_0 = 2) &= 2pq + q^2, \\ P(X_2 = 3 \,|\, X_0 = 2) &= q^2 + q. \end{aligned}$$

iii) Sind speziell $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$ gewählt, so hat die Übergangsmatrix die Gestalt

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne m_i die mittlere Dauer, um von dem Zustand i aus bis zur Absorption im Rand $R = \{3\}$ zu gelangen $(i = 1, 2, 3)$. Für jeden inneren Zustand $i = 1, 2$ gilt dann

$$m_i = 1 + \sum_{j=1}^{3} p_{ij}\, m_j,$$

wobei $p_{ij} := P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$ die Übergangswahrscheinlichkeit bezeichnet. In der vorliegenden Situation gilt

$$\begin{aligned} & m_3 = 0 \\ & m_1 = 1 + \frac{1}{2}\, m_1 + \frac{1}{2}\, m_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\, m_1 = 1 + \frac{1}{2}\, m_2 && (1) \\ & m_2 = 1 + \frac{1}{2}\, m_1 + \frac{1}{4}\, m_2. && (2) \end{aligned}$$

Da der Anfangszustand 1 ist, muss m_1 bestimmt werden.
Setzt man (1) in (2) ein, so erhält man

$$m_2 = 1 + \Big(1 + \frac{1}{2}\, m_2\Big) + \frac{1}{4}\, m_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4}\, m_2 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad m_2 = 8.$$

(1) liefert hiermit

$$\frac{1}{2}\, m_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 = 10.$$

Die mittlere Absorptionsdauer beträgt also 10 Zeitschritte.

b) Als Zustandsmenge kann man $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ wählen. Solange das Tetraeder noch nicht geworfen wurde, befinde sich das System im Zustand 0. Der Anfangszustand sei also 0.

Verwendet man die naheliegende Zuordnung

höchste Augenzahl	1	2	3	4
Zustand	1	2	3	4

,

so ergibt sich die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4

a) Da f eine Dichte ist, gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,(u+1)\,du + \int_{1}^{b} \frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\,u^2+u\Big)\Big|_{u=-1}^{0} - \frac{1}{u}\Big|_{u=1}^{b} \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}-1\Big)-\Big(\frac{1}{b}-1\Big) = \frac{5}{4}-\frac{1}{b} \end{aligned}$$

bzw.

$$b = 4.$$

b) Die Verteilungsfunktion F_X von X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}(u+1)\,du = \frac{1}{4}(x+1)^2 & \text{für } -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{4} + \int_{1}^{x} \frac{1}{u^2}\,du = \frac{5}{4} - \frac{1}{x} & \text{für } 1 \le x < 4 \\ 1 & \text{für } x \ge 4 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

c) Da X eine stetige Zufallsvariable ist, gilt

$$\begin{aligned} P\Big(-\frac{1}{2} < X < 2\Big) &= F_X(2) - F_X\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}, \\ P(0 \le X \le 1) &= F_X(1) - F_X(0) = 0, \\ P(-2 \le X \le 5) &= F_X(5) - F_X(-2) = 1. \end{aligned}$$

d) Für den Erwartungswert von X ergibt sich

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)\,du = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,(u^2+u)\,du + \int_{1}^{4} \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}\,u^3 + \frac{1}{2}\,u^2\Big)\Big|_{u=-1}^{0} + \ln(u)\Big|_{u=1}^{4} = -\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\Big) + \ln(4) = \ln(4) - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u)\,du = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,(u^3+u^2)\,du + \int_{1}^{4} 1\,du \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}\,u^4 + \frac{1}{3}\,u^3\Big)\Big|_{u=-1}^{0} + 3 = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\Big) + 3 = \frac{1}{24} + 3 = \frac{73}{24} \end{aligned}$$

folgt für die Varianz von X

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{73}{24} - \Big(\ln(4) - \frac{1}{12}\Big)^2.$$

e) Da X und Y die selbe Dichte besitzen, gilt $E(X) = E(Y)$ sowie $D^2(X) = D^2(Y)$. Ferner sind X und Y als unabhängig vorausgesetzt; hiermit sind dann auch $\frac{1}{2}(X + \frac{1}{12})$ und Y (dies wird in $(*)$ benutzt) bzw. $\frac{1}{2}X$ und $-Y$ (dies geht in $(**)$ ein) unabhängig. Die Rechenregeln für Erwartungswert bzw. Varianz liefern

i) $$\begin{aligned} E\big(\tfrac{1}{2}\,(X+\tfrac{1}{12})\,Y\big) &\overset{(*)}{=} E\big(\tfrac{1}{2}(X+\tfrac{1}{12})\big)E(Y) = \tfrac{1}{2}\big(E(X)+\tfrac{1}{12}\big)\,E(Y) \\ &\overset{E(X)=E(Y)}{=} \tfrac{1}{2}\ln(4)\big(\ln(4)-\tfrac{1}{12}\big) = \ln(2)\big(\ln(4)-\tfrac{1}{12}\big); \end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned} D^2\big(\tfrac{1}{2}X - Y + 1\big) &= D^2\big(\tfrac{1}{2}X + (-Y)\big) \overset{(**)}{=} D^2\big(\tfrac{1}{2}X\big) + D^2(-Y) = \big(\tfrac{1}{2}\big)^2 D^2(X) + (-1)^2 D^2(Y) \\ &\overset{D^2(X)=D^2(Y)}{=} \tfrac{5}{4}\,D^2(X) = \tfrac{5}{4}\Big(\tfrac{73}{24} - \big(\ln(4)-\tfrac{1}{12}\big)^2\Big). \end{aligned}$$