UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2008
15.03.2008

Wahrscheinlichkeitstheorie
für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) In einer Fabrik befinden sich drei unabhängig voneinander arbeitende Maschinen. Es sei A_k das Ereignis, dass die k-te Maschine ausfällt, und $p_k := P(A_k)$ sei die zugehörige Wahrscheinlichkeit ($k = 1, 2, 3$). Dabei gelte: $p_1 = p_2 = \frac{1}{10}$, $p_3 = \frac{1}{5}$.

B bezeichne das Ereignis {Mindestens eine Maschine fällt aus}.

- **i)** Berechnen Sie $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ und $P(A_1 \cup A_2)$.
- **ii)** Stellen Sie B mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 dar, und berechnen Sie $P(B)$.
- **iii)** Mindestens eine Maschine sei ausgefallen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Maschine ausgefallen ist.
- **iv)** Sind A_1 und B unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Eine Urne enthält drei rote und sechs schwarze Kugeln. Rein zufällig wird eine Kugel aus der Urne gezogen. Diese Kugel sowie eine zusätzliche (d.h. zehnte) Kugel derselben Farbe werden in die Urne zurückgelegt. Nach gutem Mischen wird der Urne abermals eine Kugel entnommen. Diese sei rot.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit war die erste gezogene Kugel ebenfalls rot?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein unfairer Würfel wird einmal geworfen. Bezeichnet die Zufallsvariable X_1 die erzielte Augenzahl, so habe X_1 die folgende Verteilung

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	p	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$

a) Bestimmen Sie p.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1.

c) Geben Sie alle Zahlen $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ an, für die sowohl $P(X_1 < k) \le \frac{1}{2}$ als auch $P(X_1 > k) \le \frac{1}{2}$ erfüllt sind.

d) Der unfaire Würfel wird nun N-mal in unabhängiger Folge geworfen, wobei $N \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariable X_j bezeichne die im j-ten Wurf erzielte Augenzahl ($j = 1, \ldots, N$). Bestimmen Sie

- **i)** $\lim\limits_{N \to \infty} P\left(\sum_{j=1}^{N} X_j \le 3N - \sqrt{3N}\right)$;
- **ii)** $\lim\limits_{N \to \infty} P\left(\sum_{j=1}^{N} X_j \ge \frac{7}{2}N\right)$.

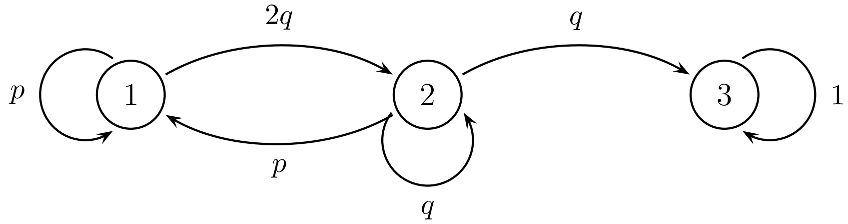
Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung gilt:

$$\Phi(\tfrac{1}{2}) \approx 0.6915, \qquad \Phi(1) \approx 0.8413, \qquad \Phi(2) \approx 0.9772, \qquad \Phi(\tfrac{5}{2}) \approx 0.9938.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Die homogene Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf der Zustandsmenge $\{1,2,3\}$ besitze den Übergangsgraphen:



Hierbei sind $p, q \in (0,1)$ fest vorgegebene Zahlen, die $p + 2q = 1$ erfüllen.

i) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix P an.

ii) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p und q die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$P\big(X_2 = 1 \,\big|\, X_0 = 2\big)$;
$P\big(X_2 = 2 \,\big|\, X_0 = 2\big)$;
$P\big(X_2 = 3 \,\big|\, X_0 = 2\big)$;
$P\big(X_3 = 2 \,\big|\, X_1 = 3\big)$.

iii) Nun seien $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{4}$. Ferner sei der Anfangszustand der Markoffkette 1. Berechnen Sie die mittlere Dauer bis zur Absorption in Zustand 3.

b) Betrachten Sie das folgende Zufallsexperiment:

Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ wird ein ideales Tetraeder geworfen, dessen vier Seitenflächen mit den Ziffern $1, 2, 3$ und 4 beschriftet sind. Als Ergebnis eines Wurfes gilt die Ziffer der Seitenfläche, auf der das Tetraeder liegen bleibt. Die Zufallsvariable Y_n beschreibe die höchste Augenzahl, die bis zum Zeitpunkt n (einschließlich) erzielt wurde. Dann ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markoffkette. (Dies muss nicht begründet werden!)

Geben Sie eine geeignete Zustandsmenge, den Anfangszustand sowie die Übergangsmatrix der Markoffkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die stetige Zufallsvariable X habe mit einem geeigneten $b > 1$ die Dichte

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(u+1) & \text{für } u \in [-1,0] \\ \frac{1}{u^2} & \text{für } u \in [1,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (u \in \mathbb{R}).$$

a) Bestimmen Sie b.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion F_X von X an.

c) Berechnen Sie

i) $P(-\frac{1}{2} < X < 2)$; **ii)** $P(0 \leq X \leq 1)$; **iii)** $P(-2 \leq X \leq 5)$.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $D^2(X)$ von X.

e) Es sei Y eine weitere Zufallsvariable mit obiger Dichte f, und Y sei unabhängig von X. Bestimmen Sie

i) $E\big(\frac{1}{2}\,(X + \frac{1}{12})\,Y\big)$; **ii)** $D^2\big(\frac{1}{2}\,X - Y + 1\big)$.

Viel Erfolg!