UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2008
08.10.2008

Wahrscheinlichkeitstheorie
für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen
Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Lösungsvorschläge

Lösung 1

Definiere die Ereignisse

$$A_j := \{\text{Es wird der Würfel } W_j \text{ aus der Urne gezogen}\} \qquad (j = 1, 2, 3)\,.$$

Dann gilt

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}\,.$$

a) Der Wertebereich von X_1 ist $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 1) &= P(X_1 = 1|A_1) \cdot P(A_1) + P(X_1 = 1|A_2) \cdot P(A_2) + P(X_1 = 1|A_3) \cdot P(A_3) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}\,, \\
P(X_1 = 2) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}\,, \\
P(X_1 = 3) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}\,, \\
P(X_1 = 4) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}\,, \\
P(X_1 = 5) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}\,, \\
P(X_1 = 6) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}\,.
\end{aligned}$$

Also lautet die Verteilung von X_1:

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$

b) Für die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel W_1 gezogen wurde, unter der Bedingung, dass die geworfene Augenzahl 3 ist, ergibt sich mit Hilfe der Formel von Bayes

$$P(A_1|X_1 = 3) = \frac{P(X_1 = 3|A_1) \cdot P(A_1)}{P(X_1 = 3)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\,.$$

c) Für den Erwartungswert von X_1 gilt

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \sum_{k=1}^{6} k \cdot P(X_1 = k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{18} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{18} \\
&= \frac{3 + 2 + 27 + 4 + 15 + 6}{18} = \frac{57}{18} = \frac{19}{6}\,.
\end{aligned}$$

d) **i)** Da die Zufallsvariable X_1 nur endlich viele Werte annimmt, ist $D^2(X_1) =: d^2$ endlich. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ sind unabhängig und identisch verteilt. Aufgrund von $E(X_1) = \frac{19}{6}$ liefert der zentrale Grenzwertsatz

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{6}{\sqrt{N}}\, S_N \le 19\sqrt{N}\Big) &= \lim_{N\to\infty} P\Big(S_N - \frac{19}{6}\, N \le 0\Big)\\ &= \lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{S_N - \frac{19}{6}\, N}{\sqrt{N}\, d} \le 0\Big) = \Phi(0) = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

ii) *1. Lösungsweg:* Für jedes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge 2$ ist $\frac{19}{6}\sqrt{N} > \frac{20}{6}$. Mit Hilfe des Chintschinschen Gesetzes der großen Zahlen ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{6}{N}\, S_N \le 19\sqrt{N}\Big) &= \lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{1}{N}\, S_N \le \frac{19}{6}\sqrt{N}\Big) \ge \lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{1}{N}\, S_N < \frac{20}{6}\Big)\\ &= \lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{1}{N}\, S_N - \frac{19}{6} < \frac{1}{6}\Big) \ge \lim_{N\to\infty} P\Big(\Big|\frac{1}{N}\, S_N - \frac{19}{6}\Big| < \frac{1}{6}\Big) = 1\,,\end{aligned}$$

woraus $\lim\limits_{N\to\infty} P\big(\frac{6}{N}\, S_N \le 19\sqrt{N}\big) = 1$ folgt.

2. Lösungsweg: Nach Konstruktion des Zufallsexperiments gilt $P(S_N \le 6N) = 1$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Ist $N \ge 4$, so gilt $\frac{19}{6}\sqrt{N} \ge \frac{19}{6} \cdot 2 \ge 6$ und damit

$$P\Big(\frac{6}{N}\, S_N \le 19\sqrt{N}\Big) = P\Big(S_N \le \big(\frac{19}{6}\sqrt{N}\big)N\Big) \ge P\Big(S_N \le 6N\Big) = 1\,,$$

woraus $\lim\limits_{N\to\infty} P\big(\frac{6}{N}\, S_N \le 19\sqrt{N}\big) = 1$ folgt.

iii) Für jedes $N \ge 400$ gilt wegen $19\sqrt{N} < 20\sqrt{N} \le \sqrt{N} \cdot \sqrt{N} = N$

$$P\big(S_N \le 19\sqrt{N}\big) \le P\big(S_N < N\big).$$

Da nach Konstruktion des Zufallsexperiments $P(S_N < N) = 0$ ist, folgt

$$\lim_{N\to\infty} P\big(S_N \le 19\sqrt{N}\big) = 0\,.$$

Lösung 2

a) **i)** Definiere die Ereignisse

$$\begin{aligned}C &:= \{\text{Sender } A \text{ überträgt eine “0”}\}\,,\\ D &:= \{\text{Sender } B \text{ überträgt eine “0”}\}\,.\end{aligned}$$

Dann sind C und D unabhängig und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C) \cdot P(D) = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{25}{32}\,.$$

ii) Der Sender A übertrage nun sechs Bits. Gibt die Zufallsvariable X die Anzahl der dabei gesendeten Bits “0” an, dann ist X binomialverteilt mit den Parametern 6 und $\frac{3}{4}$.

α) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal eine “0” gesendet wurde, ist gleich

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\Big(\frac{3}{4}\Big)^2\Big(\frac{1}{4}\Big)^4 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{3^2}{4^6} = 5 \cdot \frac{3^3}{4^6}\,.$$

β) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens fünfmal eine "0" gesendet wurde, beträgt

$$P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) = \binom{6}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right)^0$$
$$= \frac{6 \cdot 3^5 + 3^6}{4^6} = \frac{3^7}{4^6}\,.$$

b) **i)** Es gibt

$$\binom{52}{2} \cdot \binom{50}{2} \cdot \binom{48}{2} \cdot \binom{46}{2} \cdot \binom{44}{2} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \ldots \cdot 43}{2^5}$$

mögliche Verteilungen für die Karten.

ii) Sind die Ereignisse

$$A := \{\text{Mindestens ein Spieler erhält mindestens ein Ass}\}\,,$$
$$B := \{\text{Kein Spieler erhält ein Ass}\}$$

definiert, so gilt $B = \overline{A}$ und daher

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{\binom{48}{2} \cdot \binom{46}{2} \cdot \binom{44}{2} \cdot \binom{42}{2} \cdot \binom{40}{2}}{\binom{52}{2} \cdot \binom{50}{2} \cdot \binom{48}{2} \cdot \binom{46}{2} \cdot \binom{44}{2}} = 1 - \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}\,.$$

iii) Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Spieler je zwei Asse bekommen, beträgt

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{48}{2} \cdot \binom{46}{2} \cdot \binom{44}{2}}{\binom{52}{2} \cdot \binom{50}{2} \cdot \binom{48}{2} \cdot \binom{46}{2} \cdot \binom{44}{2}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{4 \cdot 4}{52 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 49} = \frac{2}{5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 49}\,.$$

c) Die Ereignisse A und B sind unabhängig, denn mit Hilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit und der Voraussetzung $P(A|B) = P(A|\overline{B})$ ergibt sich

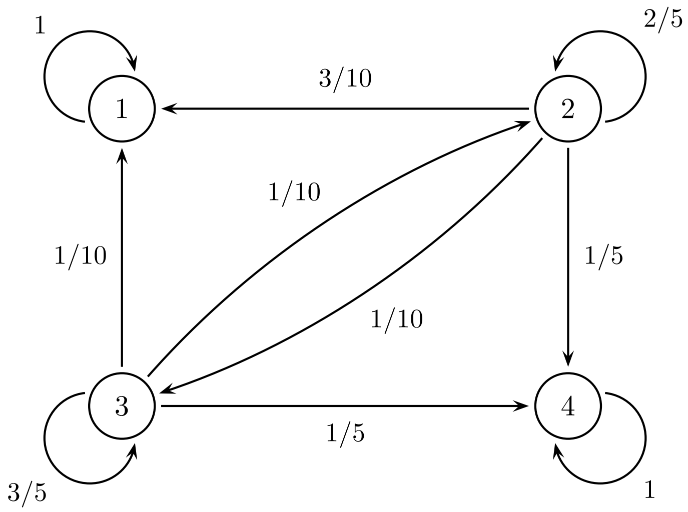
$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) = \big(P(B) + P(\overline{B})\big)P(A|B) = P(A|B)\,.$$

Lösung 3

a) **i)** Es gilt

$$a = 1 - \frac{3}{10} - \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}\,.$$

ii) Der Übergangsgraph der Markoffkette lautet:



iii) *1. Lösungsweg:* Anhand des Übergangsgraphen erkennt man

$$P(X_2 = 3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{37}{100} \, .$$

2. Lösungsweg: Mit

$$P^2 = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 43 & 17 & 10 & 30 \\ 19 & 10 & 37 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\Big(P(X_2 = 1), P(X_2 = 2), P(X_2 = 3), P(X_2 = 4)\Big) = \Big(0, 0, 1, 0\Big)\, P^2 = \frac{1}{100}\Big(19,\ 10,\ 37,\ 34\Big).$$

Also ist $P(X_2 = 3) = \frac{37}{100}$.

iv) Es bezeichne m_i die mittlere Dauer, um vom Zustand i aus bis zur Absorption im Rand $R = \{1, 4\}$ zu gelangen ($i = 1, 2, 3, 4$). Für jeden inneren Zustand $i = 2, 3$ gilt dann

$$m_i = 1 + \sum_{j=1}^{4} p_{ij}\, m_j,$$

wobei $p_{ij} := P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnen. In der vorliegenden Situation gilt

$$\begin{aligned} m_1 &= m_4 = 0 \\ m_2 &= 1 + p_{22}\, m_2 + p_{23}\, m_3 = 1 + \frac{2}{5}\, m_2 + \frac{1}{10}\, m_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{5}\, m_2 = 1 + \frac{1}{10}\, m_3 && (1) \\ m_3 &= 1 + p_{32}\, m_2 + p_{33}\, m_3 = 1 + \frac{1}{10}\, m_2 + \frac{3}{5}\, m_3. && (2) \end{aligned}$$

Da der Anfangszustand 3 ist, muss m_3 bestimmt werden.
Die Gleichung (1) ist äquivalent zu $\frac{1}{10}\, m_2 = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{10}\, m_3)$. Setzt man dies in (2) ein, so erhält man

$$m_3 = 1 + \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{1}{10}\, m_3\Big) + \frac{3}{5}\, m_3 = \frac{7}{6} + \frac{37}{60}\, m_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{23}{60}\, m_3 = \frac{7}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad m_3 = \frac{70}{23}.$$

Die mittlere Absorptionsdauer beträgt also etwa drei Zeitschritte.

b) Nummeriert man die vier Positionen mit $1, 2, 3, 4$ und symbolisiert den Kartenstapel durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

so bewirken die drei Mischvarianten die folgenden Umordnungen:

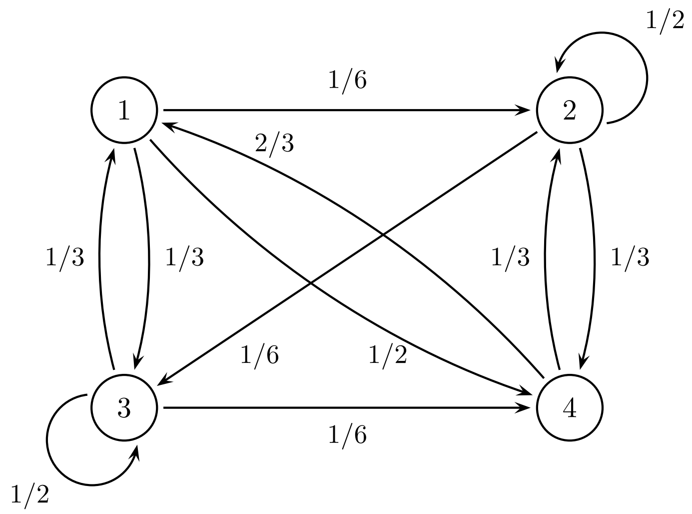
$$\mathrm{I}: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II}: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{III}: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Befindet sich der Bube in Position 1, so gelangt dieser durch die Mischmethode I zur Position 4, durch die Methode II zur Position 3 und durch III zu 2. Da die Mischweisen I, II bzw. III mit den Wahrscheinlichkeiten 1/2, 1/3 bzw. 1/6 angewandt werden, ergeben sich die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten: $p_{11} = 0$, $p_{12} = 1/6$, $p_{13} = 1/3$, $p_{14} = 1/2$.

Entsprechende Überlegungen kann man für die übrigen Ausgangspositionen durchführen. Der Übergangsgraph von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lautet:



Die Übergangsmatrix von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4

a) **i)** Die Verteilungsfunktion F_X von X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Für $x < 0$ gilt

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dy = 0\,.$$

Für $x \in [0, \alpha)$ gilt

$$F_X(x) = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^x y\,dy = \frac{1}{2\alpha^2}\,x^2\,.$$

Für $x \in [\alpha, 2\alpha)$ gilt

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{1}{2} + \int_\alpha^x \frac{2}{\alpha} - \frac{y}{\alpha^2}\,dy = \frac{1}{2} + \left(\frac{2y}{\alpha} - \frac{y^2}{2\alpha^2}\right)\Bigg|_{y=\alpha}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{2x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} - \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2\alpha^2}\left(4\alpha^2 - 4\alpha x + x^2\right) = 1 - \frac{1}{2\alpha^2}\left(2\alpha - x\right)^2. \end{aligned}$$

Für $x \geq 2\alpha$ gilt

$$F_X(x) = F_X(2\alpha) = 1\,.$$

Also ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2\alpha^2}\,x^2 & \text{für } x \in [0, \alpha) \\ 1 - \frac{1}{2\alpha^2}(2\alpha - x)^2 & \text{für } x \in [\alpha, 2\alpha) \\ 1 & \text{für } x \geq 2\alpha \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

ii) Es gilt

$$P(X^2 \le \alpha^2/4) = P(|X| \le \alpha/2) = P(-\alpha/2 \le X \le \alpha/2) = F_X(\alpha/2) - F_X(-\alpha/2) \overset{\text{i)}}{=} 1/8\,.$$

iii) Für den Erwartungswert von X ergibt sich

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\alpha} x^2\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{2}{\alpha}\,x - \frac{1}{\alpha^2}\,x^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}\,\alpha + \Big(\frac{1}{\alpha}\,x^2 - \frac{1}{3\alpha^2}\,x^3\Big)\Big|_{x=\alpha}^{2\alpha} = \frac{1}{3}\,\alpha + 4\alpha - \frac{8}{3}\,\alpha - \alpha + \frac{1}{3}\,\alpha = \alpha\,. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\alpha} x^3\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{2}{\alpha}\,x^2 - \frac{1}{\alpha^2}\,x^3\,dx \\ &= \frac{1}{4}\,\alpha^2 + \Big(\frac{2}{3\alpha}\,x^3 - \frac{1}{4\alpha^2}\,x^4\Big)\Big|_{x=\alpha}^{2\alpha} = \frac{1}{4}\,\alpha^2 + \frac{16}{3}\alpha^2 - 4\alpha^2 - \frac{2}{3}\,\alpha^2 + \frac{1}{4}\,\alpha^2 = \frac{7}{6}\,\alpha^2 \end{aligned}$$

folgt für die Varianz von X

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6}\,\alpha^2.$$

b) Da die Zufallsvariablen Y und Z mit Parameter λ exponentialverteilt sind, besitzen diese die Dichte

$$g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von Y und Z ist die Dichte h von $Y + Z$ gegeben durch die Faltung $h = g * g$, d.h. durch

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)g(x-y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Nach Definition von g ergibt sich $h(x) = 0$ für $x < 0$. Ist $x \ge 0$, so gilt

$$h(x) = \int_0^x g(y)g(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy = \lambda^2\int_0^x e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 e^{-\lambda x}x\,.$$

Also ist

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda x}x & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

die Dichte von $Y + Z$.

Wir bestimmen zunächst die Verteilungsfunktion F von $\sqrt{|Y|}$: Für $x < 0$ gilt

$$F(x) = P\big(\sqrt{|Y|} \le x\big) = 0\,.$$

Für $x \ge 0$ gilt

$$F(x) = P\big(\sqrt{|Y|} \le x\big) = P(|Y| \le x^2) = P(Y \le x^2) = F_Y(x^2) = 1 - e^{-\lambda x^2}\,.$$

Die Verteilungsfunktion von $\sqrt{|Y|}$ ist also

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Die Dichte f von $\sqrt{|Y|}$ ergibt sich aus der Verteilungsfunktion durch Ableiten

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$