UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2008
08.10.2008

Wahrscheinlichkeitstheorie für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Eine Urne enthält drei ideale Würfel W_1, W_2 und W_3. Der Würfel W_1 ist mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet, der Würfel W_2 trägt die Ziffern 1, 3 und 5 jeweils zweimal und der Würfel W_3 trägt die Beschriftung 3 auf allen sechs Seiten.
Ein Zufallsexperiment besteht daraus, dass ein Würfel rein zufällig aus der Urne gezogen und einmal geworfen wird. Die Zufallsvariable X_1 bezeichne die bei diesem Wurf erzielte Augenzahl.

a) Ermitteln Sie die Verteilung von X_1.

b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel W_1 gezogen wurde, unter der Bedingung, dass die geworfene Augenzahl 3 ist.

c) Zeigen Sie: $E(X_1) = \frac{19}{6}$.

d) Das obige Zufallsexperiment werde nun insgesamt N-mal in unabhängiger Folge durchgeführt. Die Zufallsvariable X_k bezeichne die beim k-ten Mal geworfene Augenzahl ($k = 1, \dots, N$) und $S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$ die insgesamt erzielte Augensumme. Berechnen Sie

i) $\lim\limits_{N\to\infty} P\big(\frac{6}{\sqrt{N}}\, S_N \le 19\sqrt{N}\big)$; **ii)** $\lim\limits_{N\to\infty} P\big(\frac{6}{N}\, S_N \le 19\sqrt{N}\big)$; **iii)** $\lim\limits_{N\to\infty} P\big(S_N \le 19\sqrt{N}\big)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sie brauchen in dieser Aufgabe die erhaltenen Formeln nicht zu vereinfachen!

a) Zwei Sender A und B übertragen unabhängig voneinander binäre Daten "0", "1". Eine "0" wird vom Sender A mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ sowie vom Sender B mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ gesendet.

- **i)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine "0" übertragen wird, wenn beide Sender zeitgleich jeweils ein binäres Datum senden.
- **ii)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sender A bei sechs unabhängig voneinander übertragenen binären Daten
  - α) genau zweimal eine "0" gesendet hat?
  - β) mindestens fünfmal eine "0" gesendet hat?

b) Beim Pokerspiel Texas Hold'em wird ein 52-Blatt-Kartenspiel, das vier Asse enthält, gut gemischt, und jedem der fünf Spieler A, B, C, D, E werden zwei Karten ausgegeben.

- **i)** Wie viele mögliche Verteilungen gibt es für die Karten?
- **ii)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält mindestens ein Spieler mindestens ein Ass?
- **iii)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Spieler je zwei Asse bekommen?

c) Eine Firma fertigt mit zwei Maschinen die gleichen Bauteile. Für die Ereignisse $A =$ {das Bauteil ist fehlerhaft} und $B =$ {das Bauteil wurde von der ersten Maschine produziert} gelte $0 < P(B) < 1$ sowie $P(A|B) = P(A|\overline{B})$.

Sind die Ereignisse A und B unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Die homogene Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $\{1,2,3,4\}$ besitze die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2/5 & a & 1/5 \\ 1/10 & 1/10 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$. Der Anfangszustand der Markoffkette sei $X_0 = 3$.

- **i)** Ermitteln Sie a.
- **ii)** Geben Sie den zugehörigen Übergangsgraphen an.
- **iii)** Berechnen Sie $P(X_2 = 3)$.
- **iv)** Bestimmen Sie die mittlere Dauer bis zur Absorption im Rand.

b) Ein Kartenstapel, bestehend aus den vier Karten Bube, Dame, König und Ass, soll gemischt werden. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ wird hierzu eine der folgenden Mischmethoden benutzt:

- I: Die oberste Karte wird mit der untersten Karte getauscht. (Die Reihenfolge der beiden inneren Karten bleibt unverändert.)
- II: Die beiden oberen Karten werden unter Beibehaltung der Reihenfolge unter die beiden anderen gelegt.
- III: Die unterste Karte wird zuoberst gelegt. (Die Reihenfolge der anderen Karten bleibt unverändert.)

Die Mischweise I wird mit Wahrscheinlichkeit 1/2 angewandt, während die Mischweisen II bzw. III mit den Wahrscheinlichkeiten 1/3 bzw. 1/6 verwendet werden.

Die vier möglichen Positionen des Buben seien mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ durchnummeriert. Bezeichnet Y_n die Position des Buben nach dem n-ten Mischvorgang, dann stellt $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markoffkette dar. (Dies muss nicht begründet werden!)

Bestimmen Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Es seien $\alpha > 0$ und X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} x/\alpha^2 & \text{für } x \in [0, \alpha) \\ 2/\alpha - x/\alpha^2 & \text{für } x \in [\alpha, 2\alpha) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- **i)** Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.
- **ii)** Berechnen Sie $P(X^2 \leq \alpha^2/4)$.
- **iii)** Bestimmen Sie sowohl den Erwartungswert als auch die Varianz von X.

b) Gegeben seien zwei unabhängige, jeweils mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariablen Y und Z. Bestimmen Sie die Dichten von $Y + Z$ und $\sqrt{|Y|}$.

Viel Erfolg!