UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2009
16.03.2009

**Diplom–Vorprüfung / Bachelor**

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie**

**Lösungsvorschläge**

## Aufgabe 1

**a)** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$a_n = \frac{n^{1/2}+1}{(2n^{1/4}+4n^{1/8})^2} = \frac{1+n^{-1/2}}{(2+4n^{-1/8})^2}\,.$$
Wegen $\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} n^{-1/8} = 0$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ konvergent mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+0}{(2+0)^2} = \frac{1}{4}$.

**b)** Wegen
$$\left|\frac{3+i}{10}\right| = \sqrt{\frac{9}{100}+\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{10}}{10} < 1$$
ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3+i}{10})^n$ absolut konvergent. Folglich ist auch $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3+i}{10})^n$ absolut konvergent und der Reihenwert beträgt
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+i}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+i}{10}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{3+i}{10}} - 1 = \frac{10}{7-i} - 1 = \frac{70+10i}{7^2+1^2} - 1 = \frac{20+10i}{50} = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}\,.$$
Also ist $\mathrm{Re}\big(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3+i}{10})^n\big) = \frac{2}{5}$ und $\mathrm{Im}\big(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3+i}{10})^n\big) = \frac{1}{5}$.

**c)** Für $x > 0$ gilt
$$f(x) = x^2 \sin\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big)\,.$$
Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist $f$ auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) + x^2 \cos\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) \cdot \big(e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\tfrac{1}{x^2}) - \tfrac{1}{x^4} \cdot 4x^3\big) \\ &= 2x \sin\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) - \big(e^{\frac{1}{x}} + 4x\big) \cdot \cos\big(e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big)\,, \qquad x > 0\,. \end{aligned}$$
Für $x < 0$ gilt
$$f(x) = x^2 \sin\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big)\,.$$
Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist $f$ auf $(-\infty,0)$ differenzierbar und für die Ableitung ergibt sich
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) + x^2 \cos\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) \cdot \big(e^{-\frac{1}{x}} \cdot \tfrac{1}{x^2} - \tfrac{1}{x^4} \cdot 4x^3\big) \\ &= 2x \sin\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big) + \big(e^{-\frac{1}{x}} - 4x\big) \cdot \cos\big(e^{-\frac{1}{x}} - \ln(x^4)\big)\,, \qquad x < 0\,. \end{aligned}$$
Außerdem gilt
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\big(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4)\big) = 0\,,$$
weil $|\sin(e^{\frac{1}{|x|}} - \ln(x^4))| \leqslant 1$ für alle $x \neq 0$ ist. Damit ist $f$ in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

**Aufgabe 2**

**a)** Wegen

$$5^n \leqslant 4^n + 5^n \leqslant 5^n + 5^n = 2 \cdot 5^n$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$5 = \sqrt[n]{5^n} \leqslant \sqrt[n]{4^n + 5^n} \leqslant \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 5 \,.$$

Aufgrund von $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 5^n} = 5$. Hiermit ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n + 5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{4^n + 5^n}} = \frac{3}{5}\,.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+5^n}\, x^n$ beträgt somit $5/3$. Deshalb ist diese Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 5/3$ konvergent und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 5/3$ divergent. Zu untersuchen verbleibt der Fall $|x| = 5/3$, also $x = 5/3$ oder $x = -5/3$:

Für $x = 5/3$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 5^n}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{4^n + 5^n}\,.$$

Diese Reihe divergiert wegen $\frac{5^n}{4^n+5^n} = \frac{1}{(4/5)^n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{0+1} = 1 \neq 0$.

Für $x = -5/3$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 5^n}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{4^n + 5^n}$$

divergent, weil $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \frac{(-5)^n}{4^n+5^n} = \frac{(-1)^n}{(4/5)^n+1}$ keine Nullfolge ist.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+5^n}\, x^n$ konvergiert genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 5/3$.

**b)** Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!} \right| = |x|^2 \cdot \frac{|x|^n}{(n+2)\, n!} \leqslant |x|^2 \cdot \frac{|x|^n}{n!}$$

gilt, ist $|x|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x|^2 (e^{|x|} - 1)$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!}$. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ (absolut) konvergent.

Setzt man $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!}$, dann ist $f$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x(e^x - 1)\,.$$

Definiert man $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = (x-1)e^x - \frac{1}{2}\, x^2 + 1$, so ist $g$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$g'(x) = e^x + (x-1)e^x - x = xe^x - x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Also gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Demzufolge existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0$ und $g(0) = 0$ ergibt sich $c = 0$. Damit ist die behauptete Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\, n!} = (x-1)e^x - \frac{1}{2}\, x^2 + 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

bewiesen.

**Aufgabe 3**

**a)** **i)** Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\big(1-|x-1|\big)x\,dx &= \int_{-1}^{1}\big(1-(1-x)\big)x\,dx + \int_{1}^{2}\big(1-(x-1)\big)x\,dx\\ &= \int_{-1}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2}\big(2x-x^2\big)\,dx = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} + \Big[x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_{1}^{2}\\ &= \frac{1}{3}-\Big(-\frac{1}{3}\Big)+4-\frac{8}{3}-\Big(1-\frac{1}{3}\Big)=\frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

**ii)** Wegen $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, ist

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx &= \int_0^2\Big(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\Big)\,dx = \Big[\ln(x^2+1)+\arctan(x)\Big]_0^2\\ &= \ln(5)+\arctan(2)-\big(\ln(1)+\arctan(0)\big)=\ln(5)+\arctan(2)\,.\end{aligned}$$

**iii)** Mit Hilfe der Substitution $u=\sqrt{x}$, $dx=2u\,du$ und zweimaliger partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x}\,2^{\sqrt{x}}\,dx &= \int_0^1 u\,2^u\,2u\,du = 2\int_0^1 u^2\,e^{u\ln 2}\,du = 2\Big[u^2\,\frac{e^{u\ln 2}}{\ln 2}\Big]_0^1 - 2\int_0^1 2u\,\frac{e^{u\ln 2}}{\ln 2}\,du\\ &= 2\,\frac{e^{\ln 2}}{\ln 2} - 4\bigg(\Big[u\,\frac{e^{u\ln 2}}{(\ln 2)^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{u\ln 2}}{(\ln 2)^2}\,du\bigg)\\ &= 2\,\frac{2}{\ln 2} - 4\,\frac{e^{\ln 2}}{(\ln 2)^2} + 4\Big[\frac{e^{u\ln 2}}{(\ln 2)^3}\Big]_0^1 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{8}{(\ln 2)^2} + 4\,\frac{e^{\ln 2}-1}{(\ln 2)^3}\\ &= \frac{4}{\ln 2} - \frac{8}{(\ln 2)^2} + \frac{4}{(\ln 2)^3} = \frac{4(\ln(2)-1)^2}{(\ln 2)^3}\,.\end{aligned}$$

**b)** Für jedes $x\geqslant 1$ gilt

$$0\leqslant \sqrt{x^3+3}-\sqrt{x^3} = \frac{(\sqrt{x^3+3})^2-(\sqrt{x^3})^2}{\sqrt{x^3+3}+\sqrt{x^3}} = \frac{3}{\sqrt{x^3+3}+\sqrt{x^3}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{x^3}}\,.$$

Da das uneigentliche Integral $\int_1^\infty 3x^{-3/2}\,dx = \lim_{r\to\infty}[-6x^{-1/2}]_1^r = \lim_{r\to\infty}(-6r^{-1/2}+6)=6$ konvergiert, ist

$$\int_1^\infty \big(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{x^3}\big)\,dx$$

nach dem Majorantenkriterium konvergent.

**Aufgabe 4**

**a)** Mittels Zeilenumformungen bringt man $A \in \mathbb{C}^{3\times 4}$ auf Zeilennormalform (die Zeilen werden dabei jeweils mit $Z_1$, $Z_2$ und $Z_3$ bezeichnet):

$$A = \begin{pmatrix} -i & 1 & 2i & 0 \\ -2 & -2i & 5 & 1+i \\ i & -1 & 2 & 4i \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to iZ_1]{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 0 \\ -2 & -2i & 5 & 1+i \\ 0 & 0 & 2+2i & 4i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 + 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 2+2i & 4i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 + 2Z_2]{Z_3 \to Z_3 - (2+2i)Z_2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 2+2i \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann nun den $(-1)$-Ergänzungstrick verwenden, um eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ abzulesen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+2i \\ 0 \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aus der Dimensionsformel $\dim \operatorname{Bild} A + \dim \operatorname{Kern} A = 4$ folgt $\dim \operatorname{Bild} A = 2$. Da die zwei Vektoren

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} -i \\ -2 \\ i \end{pmatrix}, \quad Ae_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 4i \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und beide in $\operatorname{Bild} A$ liegen, ist $\{Ae_1, Ae_4\}$ eine Basis von $\operatorname{Bild} A$.

**b)** Sei $b \in \mathbb{R}$ und

$$M_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & b(b+1) \\ b-1 & b & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

**i)** Für $b = 0$ ist $M_0$ nicht regulär, weil in diesem Fall die zweite Zeile von $M_0$ eine Nullzeile ist. Für $b \neq 0$ ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & b(b+1) & 0 & 1 & 0 \\ b-1 & b & b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to \frac{1}{b} Z_2]{Z_3 \to Z_3 + (1-b)Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b+1 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 1 & b & 1-b & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b+1 & 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b & -1/b & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to -Z_3]{Z_2 \to Z_2 + (b+1)Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-b^2 & -1 & b+1 \\ 0 & 0 & 1 & b-1 & 1/b & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b^2 & 1 & -(b+1) \\ 0 & 1 & 0 & 1-b^2 & -1 & b+1 \\ 0 & 0 & 1 & b-1 & 1/b & -1 \end{array}\right)$$

Fazit: Genau für $b \neq 0$ ist die Matrix $M_b$ regulär. In diesem Fall gilt

$$M_b^{-1} = \begin{pmatrix} b^2 & 1 & -(b+1) \\ 1-b^2 & -1 & b+1 \\ b-1 & 1/b & -1 \end{pmatrix}.$$

**ii)** Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$ besitze bezüglich der Standardbasen in $V$ und $W$ die Darstellungsmatrix

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die drei Vektoren $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von $W = \mathbb{R}^3$. Bezeichnen $e_1, e_2, e_3$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$, dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= M_{-1}\, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3\,, \\ \phi(e_2) &= M_{-1}\, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = w_2 = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3\,, \\ \phi(e_3) &= M_{-1}\, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = w_3 = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3\,. \end{aligned}$$

Wählt man in $V$ die Standardbasis $e_1, e_2, e_3$ des $\mathbb{R}^3$ und in $W$ die Basis $w_1, w_2, w_3$, so ist die Darstellungsmatrix von $\phi$ bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix $I_3$.