Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
07.03.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1: ((2 + 2) + 6 Punkte)

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch

$$a_1 := \sqrt{6}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

definiert.

(i) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt durch 6 ist.

(ii) Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Sei $D = \mathbb{R} \setminus (-2, 2]$ und die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 4}}{x}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Wertebereich $f(D)$ von f. Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to D$ besitzt. Berechnen Sie f^{-1} und untersuchen Sie f^{-1} auf Stetigkeit.

Aufgabe 2: (3 + (3 + 4) Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\left| \frac{z - 3}{z - 2} \right| \geq 1.$$

(b) Die Potenzreihe $P(x)$ sei durch

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n + 1}\, x^n$$

definiert.

(i) Bestimmen Sie die Menge D aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe $P(x)$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $x \in D$ die folgende Gleichung gilt

$$x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n + 1}\, x^n = \frac{x}{(1 - x)^2} + \ln(1 - x).$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung für $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Aufgabe 3: (4 + (2 + 2 + 2) Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert. Berechnen Sie diesen gegebenenfalls:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x - \tan(5x)}{x^3}.$$

(b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren. Berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin\big(\pi\ln(x)\big)}{x}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}\,dx.$

Aufgabe 4: (4 + 6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum der Funktion

$$f : [-1,3] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto (x^2+2x-2)e^{-x}.$$

(b) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 7 & 16 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Kern$A$ und Bild$A$ sowie die Menge aller Lösungen der Gleichung $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse finden Sie ab **21.04.2016** unter

http://www.math.kit.edu/iana1/

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, dem **28.04.2016**, von 16 bis 18 Uhr im Hörsaal am Fasanengarten (Geb.50.35) statt.

Die müdlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **02.05.2016** bis **06.05.2016**.