

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- a) Die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_n = \frac{(2\sqrt{n} + 3)^2}{(3\sqrt[3]{n} + 2)^3}.$$

Prüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ konvergent ist, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

- b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3i)^{n+1}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Reihenwert sowie den Betrag des Reihenwertes.

- c) Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\sin^2(x)}$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(\tan(e^x))$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

- a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - \frac{1}{n})^n (n+1)}{2n^3} x^n$$

und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen diese Potenzreihe konvergiert.

- b) Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{x+1} \right)^n$$

konvergiert, und berechnen Sie für diese x den Wert der Reihe.

Hinweis: Sie können $y = \frac{x}{x+1}$ setzen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_0^1 x e^{2x^2} \sin(e^{x^2}) dx;$

(ii) $\int_0^\pi (\sinh x)(\cos x) dx.$

b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Für jedes $b \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $M_b \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gegeben durch

$$M_b = \begin{pmatrix} 3 & 0 & b \\ 1 & b+1 & 1 \\ b & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Sei $b = 3$. Bestimmen Sie eine Basis von Kern M_3 und eine Basis von Bild M_3 .

b) Sei $b = 3$ und $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung $\phi: V \rightarrow W$ besitze bezüglich der Standardbasen in V und W die Darstellungsmatrix M_3 . Gegeben seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch v_1, v_2, v_3 eine Basis von \mathbb{R}^3 gegeben ist, und berechnen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ , wenn in V und W jeweils die Basis v_1, v_2, v_3 genommen wird.

c) Bestimmen Sie die Menge S aller $b \in \mathbb{R}$, für die M_b regulär ist, und berechnen Sie $(M_b)^{-1}$ für jedes $b \in S$.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den 13.10.2009, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-h.html>

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 21.10.2009, von 14:00 Uhr bis 16:00 Uhr im HS 93 (Gebäude 10.81) statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 26.10.2009 bis 30.10.2009 im Allianz-Gebäude 05.20.