UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2009
22.09.2009

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen und Geodäsie
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 a): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(2\sqrt{n}+3)^2}{(3\sqrt[3]{n}+2)^3} = \frac{n \cdot (2+3/\sqrt{n})^2}{n \cdot (3+2/\sqrt[3]{n})^3} = \frac{(2+3/\sqrt{n})^2}{(3+2/\sqrt[3]{n})^3}.$$

Wegen $2+3/\sqrt{n} \to 2$ und $3+2/\sqrt[3]{n} \to 3 \neq 0$ für $n \to \infty$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach den Grenzwertsätzen gegen $\frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$.

1 b): Wegen $\frac{2^k}{(3i)^{k+1}} = \frac{1}{3i} \cdot \left(\frac{2}{3i}\right)^k$ und $\left|\frac{2}{3i}\right| = \frac{2}{3} < 1$ konvergiert die Reihe absolut (geometrische Reihe!). Mithilfe der Formel für die geometrische Reihe berechnet man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(3i)^{k+1}} = \frac{1}{3i} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3i}\right)^k = \frac{1}{3i}\Big(\frac{1}{1-\frac{2}{3i}} - 1\Big) = -\frac{2i}{3(3-2i)} = -\frac{2}{13} + i\frac{4}{39}.$$

Der Betrag des Reihenwertes ist also $\frac{2}{3\sqrt{13}}$.

1 c) (i): Wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ und $\cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \ldots$ ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

1 c) (ii): Setze zunächst $y = e^x$. Dann ist

$$\lim_{x\to -\infty} e^x \ln(\tan(e^x)) = \lim_{y\to 0+} y \ln(\tan y) = \lim_{y\to 0+} y \ln(y \cdot \frac{\tan y}{y}) = \lim_{y\to 0+} \Big(y \ln y + y \ln(\frac{\tan y}{y})\Big).$$

Nun gilt $\lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = \tan'(0) = 1$ und $\lim_{y\to 0+} y \ln y = \lim_{x\to\infty} -xe^{-x} = 0$. Also ist

$$\lim_{x\to -\infty} e^x \ln(\tan(e^x)) = 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Aufgabe 2 a): Setze $a_n := \frac{(2-\frac{1}{n})^n (n+1)}{2n^3}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(2-\frac{1}{n})\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{2n^3}}.$$

Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ gilt $\sqrt[n]{2n^3} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}^3 \to 1$ und wegen $\sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{n+1} \le \sqrt[n]{2n}$ dann auch $\sqrt[n]{n+1} \to 1$. Somit ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ und nach Cauchy-Hadamard ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = \frac{1}{2}$. Die Reihe konvergiert also absolut für $|x| < 1/2$ und sie divergiert für $|x| > 1/2$. Für $|x| = 1/2$ ist

$$\left|a_n x^n\right| = \frac{(1-\frac{1}{2n})^n (n+1)}{2n^3} \le \frac{n+1}{2n^3} \le \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die Potenzreihe für $|x| = 1/2$ nach dem Majorantenkriterium.
Die Potenzreihe konvergiert also für $x \in [-1/2, 1/2]$ und sie divergiert für $x \in \mathbb{R}\setminus[-1/2, 1/2]$.
2 b): Setze $y = \frac{x}{x+1}$ und untersuche $\sum_{n=1}^{\infty} ny^n$. Diese Reihe konvergiert genau für $y \in (-1, 1)$. Mittels gliedweiser Differentiation der geometrischen Reihe erhält man für $y \in (-1, 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny^n = y \cdot \sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = y\frac{d}{dy}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\Big) = y\frac{d}{dy}\Big(\frac{1}{1-y}\Big) = \frac{y}{(1-y)^2}.$$

Nun gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$y = \frac{x}{x+1} \in (-1, 1) \iff \frac{1}{x+1} \in (0, 2) \iff x + 1 > \frac{1}{2} \iff x > -\frac{1}{2}.$$

Die Reihe konvergiert also genau für $x \in (-1/2, \infty)$ und für diese x gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^n = \frac{\frac{x}{x+1}}{(1-\frac{x}{x+1})^2} = \frac{x}{x+1} \cdot (x+1)^2 = x^2 + x.$$

3 a) (i): Die Substitution $e^{x^2} = t$, $dt = 2xe^{x^2}\, dx$ führt auf

$$\int_0^1 x\, e^{2x^2} \sin(e^{x^2})\, dx = \frac{1}{2}\int_1^e t \sin t\, dt.$$

Mithilfe von partieller Integration ist

$$\frac{1}{2}\int_1^e t \sin t\, dt = -\frac{t}{2}\cos t\Big|_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e \cos t\, dt = \Big[\frac{-t\cos t + \sin t}{2}\Big]_1^e = -\frac{e}{2}\cos e + \frac{\sin e}{2} + \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}.$$

3 a) (ii): Zweimalige partielle Integration führt zu

$$\int_0^{\pi} \sinh x \cos x\, dx = \underbrace{\sinh x \sin x\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^1 \cosh x \sin x\, dx = \cosh x \cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sinh x \cos x\, dx.$$

Also ist

$$\int_0^{\pi} \sinh x \cos x\, dx = -\frac{1 + \cosh \pi}{2}.$$

3 b): Der Integrand ist stetig auf $[0, \infty)$. Deshalb ist das Integral nur bei ∞ uneigentlich. Sei also $R > 0$. Dann gilt mittels der Substitution $t = e^x$, $dt = e^x\, dx$:

$$\int_0^R \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx = \int_1^{e^R} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(e^R) - \arctan 1 = \arctan(e^R) - \frac{\pi}{4}.$$

Wegen $e^R \to \infty$ für $R \to \infty$ und $\arctan y \to \frac{\pi}{2}$ für $y \to \infty$ konvergiert das Integral und man erhält

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx = \lim_{R\to\infty} \arctan(e^R) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 4 a): Wir bringen die Matrix M_3 auf Zeilenstufenform

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \sim> \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sim> \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat den Rang 2. Nach der Dimensionsformel ist der Kern von M_3 also eindimensional und eine Basis ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (verwende z.B. den -1-Ergänzungstrick).
Das Bild von M_3 hat demnach die Dimension 2 und wird aufgespannt von den Spalten von M_3. Eine Basis ist gegeben durch die erste und die zweite Spalte von M_3 oder durch v_2 und v_3 aus Teil b).

4 b): Die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sind orthogonal, also linear unabhängig. Aus Dimensionsgründen bilden sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$.
Man berechnet

$$M_3 v_1 = 0, \quad M_3 v_2 = 6v_2 + 2v_3, \quad M_3 v_3 = 4v_3,$$

so dass die gewünschte Darstellungsmatrix gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4 c): Wir verwenden das Verfahren aus der Vorlesung.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b+1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sim> \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 1-\frac{b}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\frac{b^2}{3} & -\frac{b}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

An dieser Stelle ist klar, dass M_b nicht regulär ist für $b = -1$ und für $b^2 = 9$. Für alle anderen $b \in \mathbb{R}$ hat M_b den Rang 3 und ist also regulär. Es gilt somit $S = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3, -3\}$.
Die Fortsetzung des Verfahrens führt auf

$$\sim> \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3-b}{3(b+1)} & \frac{-1}{3(b+1)} & \frac{1}{b+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b}{9-b^2} & 0 & \frac{3}{9-b^2} \end{pmatrix} \quad \sim> \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{9-b^2} & 0 & \frac{-b}{9-b^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{(b+1)(b+3)} & \frac{1}{b+1} & \frac{-1}{(b+1)(b+3)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b}{9-b^2} & 0 & \frac{3}{9-b^2} \end{pmatrix}.$$

Für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 3\}$ gilt also

$$(M_b)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{9-b^2} & 0 & \frac{-b}{9-b^2} \\ \frac{-1}{(b+1)(b+3)} & \frac{1}{b+1} & \frac{-1}{(b+1)(b+3)} \\ \frac{-b}{9-b^2} & 0 & \frac{3}{9-b^2} \end{pmatrix}.$$