Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2011
21.09.2011

Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Aufgabe 1 $\quad(3+4+3=10$ Punkte$)$

a) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge

$$\left\{\, z^2 \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } |z| < 3 \text{ und } \arg(z) \in (0, \tfrac{3}{4}\pi) \,\right\}.$$

b) Bestimmen Sie Betrag und Argument aller $z \in \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$\big(z\,|z|\big)^2 = 8i\,\overline{z}$$

genügen.

c) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}\,.$$

Aufgabe 2 $\quad(6+4=10$ Punkte$)$

a) Ermitteln Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right)\frac{x^k}{k}$$

konvergiert.

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{1}{5}\} \to \mathbb{C}\,, \quad f(z) := \frac{1}{1+5z}$$

um die Entwicklungsstelle $z_0 = 2$, geben Sie den zugehörigen Konvergenzradius an und berechnen Sie $f^{(9)}(2)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(5 + 5 = 10 Punkte)**

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{2x^3+1}-\sqrt{2x^3-1}\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{3x}-5x\right)^{1/x}$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(2+t^2)}}\,dt\,.$$

i) Begründen Sie, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(x)$ für jedes $x \in (0,\infty)$.

ii) Untersuchen Sie f auf Monotonie.

iii) Zeigen Sie, dass $f(x) \leqslant \arctan(x)$ für jedes $x \in (0,\infty)$ gilt.

Hinweis zu b): Es ist nicht ratsam zu versuchen, das Integral zu berechnen.

Aufgabe 4 **(8 + 2 = 10 Punkte)**

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \max\{3^{-x}, 3^x\}\,dx$

ii) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$

iii) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\cos(x)\,dx$

b) Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int_a^b x f''(x)\,dx = aA + bB + f(a) - f(b)$$

erfüllt ist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 12.10.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Donnerstag, den 20.10.2011, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 24.10.2011 bis 28.10.2011 im Allianz-Gebäude 05.20.