

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (3 + 7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösungsvorschlag: Beweis durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ gilt (Induktionsanfang):

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^k k^2 = -1 = (-1)^1 \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Es gelte nun für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ als Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somit gelingt der Induktionsschluss folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2 \stackrel{(IV)}{=} (-1)^n \left(\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)^2 \right) \\ &= (-1)^n (n+1) \left(\frac{n}{2} - n - 1 \right) = (-1)^{n+1} (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

b) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{3}{2}x - \ln(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag: f ist in jedem $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung lautet:

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{2x}{1+x^2}.$$

Da $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$ gilt, ist $x^2 + 1 \geq 2x$, sodass

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{2x}{1+x^2} \geq \frac{3}{2} - 1 \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Damit ist f streng monoton wachsend.

ii) Ist f bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Betrachten Sie $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Lösungsvorschlag: f ist als Komposition stetiger Funktionen auf \mathbb{R} stetig. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2}x - \ln(1+x^2) = -\infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{3}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x} \right) = \infty,$$

da nach l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1/x} = 0$$

gilt. Nach dem Zwischenwertsatz ist f surjektiv. Nach i) ist f streng monoton wachsend und somit injektiv. Da f injektiv und surjektiv ist, ist f bijektiv.

Aufgabe 2 (3 + 4 + 3 Punkte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden reellen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n.$$

Lösungsvorschlag: Wir definieren die Folge der Koeffizienten $a_n := \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ und betrachten $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{(n+1)^{2n+2} (2n)!}{(2n+2)! n^{2n}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n} (n+1)^2 \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^2 \left(\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \right) = \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^2 \left(\frac{(n+1)}{2(2n+1)} \right) \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^2 \left(\frac{(1 + \frac{1}{n})}{2(2 + \frac{1}{n})} \right) \rightarrow \frac{e^2}{4} \quad (\text{für } n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Somit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = \frac{4}{e^2}$.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)x^{2k}?$$

Finden Sie für diese $x \in \mathbb{R}$ einen geschlossenen Ausdruck für die Reihe ("geschlossen" bedeutet hier einen Ausdruck "ohne Reihe").

Lösungsvorschlag: Man betrachtet $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(2k+1)x^{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2k+1} x^2 = x^2$ und findet mit dem Wurzelkriterium, dass die Reihe konvergiert, wenn $|x| < 1$, und divergiert, wenn $|x| > 1$. Ist $|x| = 1$, so ist $(2k+1)x^{2k} = (2k+1)$ keine Nullfolge. Die Reihe divergiert also in diesem Fall.

Benutzt man die Identität $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$, so findet man die geschlossene Darstellung.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)x^{2k} &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} \right) = \frac{d}{dx} \left(x \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \right) \stackrel{|x|<1}{=} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x^2} \right) \\ &= \frac{1}{1-x^2} - \frac{x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

- c) Untersuchen Sie den folgenden Limes auf Existenz und berechnen Sie ihn gegebenenfalls:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x (\ln(2 + e^x) - x).$$

Lösungsvorschlag: Wie folgende Rechnung zeigt, existiert der Grenzwert.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^x (\ln(2 + e^x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x (\ln(2 + e^x) - \ln(e^x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(\ln \left(\frac{2 + e^x}{e^x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(\ln \left(\frac{2}{e^x} + 1 \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + 2 \frac{1}{e^x} \right)}{\frac{1}{e^x}} \stackrel{y := \frac{1}{e^x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2y)}{y} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{1 + 2y} = 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)

- a) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die der folgenden Bedingung genügen:

$$|z|^2 - 6 \operatorname{Re}(z) \leq 0.$$

Lösungsvorschlag: Wir schreiben $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann wird die Ungleichung zu $x^2 + y^2 - 6x \leq 0$ oder $(x - 3)^2 + y^2 \leq 3^2$.

Deshalb ist die Menge eine Kreisscheibe mit Zentrum $3 + 0i = 3$ und Radius 3.

- b) Berechnen Sie die folgenden Integrale

i) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx,$

ii) $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx.$

Lösungsvorschlag: i) Mit partieller Integration bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx &= - \int_{-\pi}^{\pi} x (\cos(x))' dx = -x \cos(x) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (x)' \cos(x) dx \\ &= 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx = 2\pi + (\sin(x)) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

- ii) Die Substitution $t = x^2$ gibt $dt = 2x dx$ also

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} 2x dx = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 1 - \ln(t+1) \Big|_{t=0}^{t=1} = 1 - \ln(2). \end{aligned}$$

- c) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

Lösungsvorschlag: Da $|1 + \sin(x)| \leq 2$ bekommen wir

$$\left| \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Wir werden zeigen, dass $\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ konvergent ist, und dann folgt mit dem Majoranten-Kriterium, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{1 + \sin(x)}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

absolut konvergent (und deshalb konvergent) ist. Es gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \int_1^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

Da auf $[0, 1]$ $\frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ und $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ konvergent ist, so ist auch $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ konvergent.

Da auf $[1, \infty)$ $\frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{2}{x\sqrt{x}}$ und $\int_1^{\infty} \frac{2}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent ist, so ist auch $\int_1^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ konvergent.

Deshalb ist $\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ konvergent, was noch zu zeigen war.

Aufgabe 4 (3 + 4 + 3 Punkte)

Sei $C[0, 2\pi]$ der \mathbb{R} -Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$ und seien $b_1, b_2, b_3 \in C[0, 2\pi]$ gegeben durch $b_1(x) = 1, b_2(x) = \cos(x), b_3(x) = \sin(x)$. Sei $V := \text{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$.

- a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.

Hinweis: Betrachten Sie $b_j(x)$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ und $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

Lösungsvorschlag: Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so dass $\sum_{j=1}^3 a_j b_j(x) = 0$. Wenn $x = 0$ bekommen wir $a_1 + a_2 = 0$. Wenn $x = \pi$ bekommen wir $a_1 - a_2 = 0$. Wenn wir diese beiden Gleichungen addieren, bekommen wir $a_1 = 0$ und deshalb $a_1 = a_2 = 0$. Wenn wir dann $x = \frac{\pi}{2}$ einsetzen, bekommen wir $a_3 = 0$. Also ist $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ und die Funktionen b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig.

- b) Sei $\phi = \arcsin(\frac{2}{\sqrt{5}})$. Durch

$$\begin{cases} T(b_1) = 2 + \cos(x) \\ T(b_2) = 1 + \sqrt{5} \sin(x + \phi) \\ T(b_3) = \sqrt{5} \sin(x + \frac{\pi}{2} - \phi) \end{cases}$$

wird eine lineare Abbildung $T : V \rightarrow C[0, 2\pi]$ definiert. Zeigen Sie, dass $T(V) \subseteq V$ gilt, und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A von $T : V \rightarrow V$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 im Argument- und im Zielraum.

Lösungsvorschlag: Wir haben $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin \phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Also ist $\sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = \cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Nach den Additionstheoremen ist also

$$T(b_2) = 1 + \sqrt{5} \sin(x + \phi) = 1 + \sqrt{5}(\sin x \cos \phi + \cos x \sin \phi) = 1 + 2 \cos x + \sin x$$

und

$$T(b_3) = \sqrt{5} \sin\left(x + \frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sqrt{5}(\sin x \sin \phi + \cos x \cos \phi) = 2 \sin x + \cos x.$$

Wir haben also $T(b_j) \in V$ für $j = 1, 2, 3$ und daraus folgt $T(V) \subseteq V$. Außerdem können wir die Darstellungsmatrix A ablesen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- c) Untersuchen Sie die folgende Matrix auf Invertierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag: Wir lösen die Gleichung $AX = I$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ersetze Z_2 durch $Z_2 + (2/3)Z_1$ und ersetze Z_3 durch $Z_3 - (1/3)Z_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -4/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & -1/3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ersetze Z_3 durch $Z_3 + (1/2)Z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -4/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/2 & 1 \end{array} \right).$$

Bringe die Diagonalelemente links auf 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array} \right).$$

Ersetze Z_2 durch $Z_2 + (1/2)Z_3$ und ersetze Z_1 durch $Z_1 - (1/3)Z_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & -1/12 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array} \right).$$

Ersetze Z_1 durch $Z_1 + (2/3)Z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array} \right).$$

Wir sehen, dass A invertierbar ist und dass die Inverse von A gegeben ist durch

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$